МЕХАНИКА

Э. А. Буланов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по сопротивлению материалов

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Э. А. Буланов

МЕХАНИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по сопротивлению материалов

5-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
Б90

Буланов Э. А.

Б90 Решение задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс] / Э. А. Буланов. — 5-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 218 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2651-8

Учебное пособие содержит теоретические сведения и подробные решения задач по основным типам сопротивления материалов, а также задачи для самостоятельного решения с ответами.

Предназначено для выработки навыков самостоятельного решения задач у студентов немашиностроительных специальностей, изучающих сопротивление материалов и прикладную механику.

УДК 539.3/.6
ББК 30.121

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Решение задач по сопротивлению материалов / Э. А. Буланов. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 215 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0743-2.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-9963-2651-8 © БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание учебного пособия «Решение задач по сопротивлению материалов» было издано в 1994 году издательством «Высшая школа». Весь тираж разошелся за несколько месяцев. В последующие годы ни одного аналогичного пособия выпущено не было, что позволило выпустить второе издание этого учебного пособия.

В данном третьем издании исправлены замеченные опечатки, добавлено несколько новых задач.

Учебное пособие содержит подробное решение задач на основные темы сопротивления материалов в соответствии с программами дисциплин «Сопротивление материалов», «Прикладная (техническая) механика» для немашиностроительных специальностей и предназначено для выработки навыков самостоятельного решения задач. Пособие ориентировано в первую очередь на студентов-заочников, но может быть полезно для самостоятельной работы студентам очной формы обучения, а также преподавателям при подготовке курса практических занятий.

Основная цель, которую преследует это пособие, — дать подробное с максимальным количеством пояснений решение основных типовых задач, причем сначала самых простых и наиболее подробно, а затем с увеличением сложности задач решение дается более схематично. Поэтому при изучении темы необходимо последовательно ознакомиться с решением всех задач. В конце каждой темы приводятся задачи для самостоятельного решения с ответами.

При разработке пособия автор стремился в первую очередь сосредоточить внимание изучающего непосредственно на сопротивлении материалов. В связи с этим решения в основном приводятся в буквенных выражениях, что позволяет избавить студента от сложных арифметических вычислений и анализа размерности величин при изучении нового материала, а все внимание сосредоточить на решении задач.

В задачах с числовыми данными решение приводится в буквенных обозначениях до получения окончательного результата. И лишь потом вместо каждой буквы подставляются числовые значения в соответствующих размерностях.

При разработке пособия автор стремился дать минимальное, но достаточное количество задач по каждой теме, чтобы создать по возможности краткое по объему пособие. Опыт показывает, что эффективность подобных пособий обратно пропорциональна их объему.

Автор выражает признательность рецензентам за отзывы и замечания, направленные на улучшение качества книги.

Автор

ГЛАВА 1

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

На элементы конструкции действуют внешние нагрузки: *активные* и *реактивные* (реакции связей), под действием которых возникают *внутренние силы* — силы взаимодействия между частицами твердого тела, препятствующие его деформации. Как всякую систему сил, внутренние силы, распределенные в сечении нагруженного бруса, можно привести к центру тяжести сечения, в результате получим главный вектор R и главный момент $M(R)$ внутренних сил в сечении. Метод сечений позволяет определить *внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях бруса, через внешние нагрузки.*

Главный вектор внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении нагруженного бруса, равен сумме всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения:

$$R = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_i.$$

Главный момент внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении нагруженного бруса, относительно центра тяжести сечения равен сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от сечения:

$$M(R) = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M(F_i),$$

где под F_i подразумевается любая i-я внешняя нагрузка.

Проецируя главный вектор и главный момент на координатные оси, получим шесть составляющих: три составляющие главного вектора и три составляющие главного момента, которые носят название внутренних силовых факторов в сечении (рис. 1.1):

$$R = N + Q_y + Q_z,$$

где N — продольная сила, Q_y, Q_z — поперечные силы;

$$M(R) = M_x + M_y + M_z,$$

где $M_x = T$ — крутящий момент; M_y, M_z — изгибающие моменты.

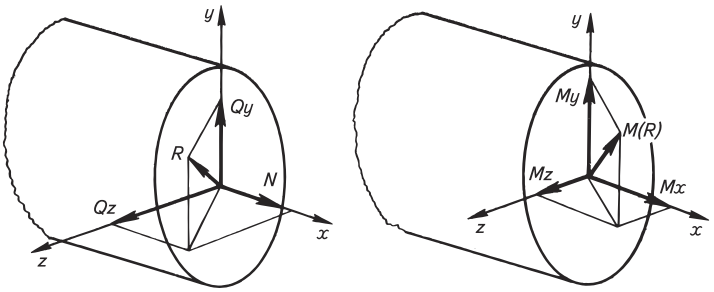


Рис. 1.1

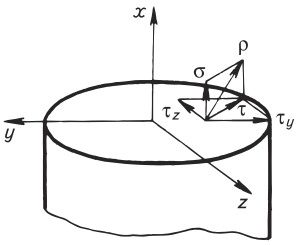


Рис. 1.2

Внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения, называется *напряжением*, выражается в паскалях (Па = Н/м^2) или мегапаскалях (МПа = 10^6 Па = Н/мм^2).

Напряжение принято выражать через его составляющие (рис. 1.2):

$$P = \sigma + \tau = \sigma + \tau_y + \tau_z,$$

где σ — нормальное напряжение, τ — касательное напряжение; τ_y, τ_z — составляющие касательного напряжения по осям y и z.

В результате суммирования элементарных внутренних сил и элементарных моментов этих сил по всей площади сечения бруса A получим выражения для внутренних силовых факторов через напряжения. С другой стороны, согласно методу сечений, их можно выразить через внешние нагрузки:

$$N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_{xi};\ M_x = T = \int_A (y\tau_z + z\tau_y)\mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{xi};$$

$$Q_y = \int_A \tau_y \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_{yi};\ M_y = \int_A z\sigma \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{yi};$$

$$Q_z = \int_A \tau_z \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_{zi};\ M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{zi}.$$

Эпюра внутреннего усилия — это график изменения внутреннего усилия по длине бруса. Цель построения эпюры — определить качественную и количественную картину деформации бруса, наиболее нагруженные участки, сечения.

Общий порядок построения эпюр внутренних силовых факторов.

1. Произвольно направляют реакции. Составляют уравнения равновесия, из которых определяют реакции опор.

2. Брус разбивают на участки, проводят произвольные сечения, задают координаты сечений.

3. Для каждого участка записывают уравнения внутренних силовых факторов.

4. По полученным уравнениям строят графики — эпюры.

1.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Растяжение (*сжатие*) — деформация, вызванная силами или системами сил, равнодействующая которых или сами силы приложены в центре тяжести сечения и перпендикулярны сечению.

При растяжении (сжатии) в каждом сечении бруса действует только *один* внутренний силовой фактор — продольная сила N.

Продольная сила представляет собой равнодействующую внутренних нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса, численно равную алгебраической сумме проекций на продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, т. е.

$$N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_{xi}.$$

При *растяжении* продольную силу принято считать *положительной*, а при *сжатии* — *отрицательной* (рис. 1.3).

Внешние нагрузки, действующие на брус, могут быть сосредоточенными и распределенными. *Сосредоточенные нагрузки* передают свое действие через относительно небольшие участки бруса. *Распределенные нагрузки* действуют либо на все сечения бруса (силы веса, инерции — объемные нагрузки), либо на достаточно большие участки бруса (силы трения — поверхностные нагрузки).

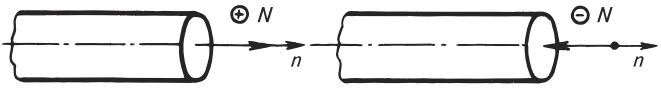


Рис. 1.3

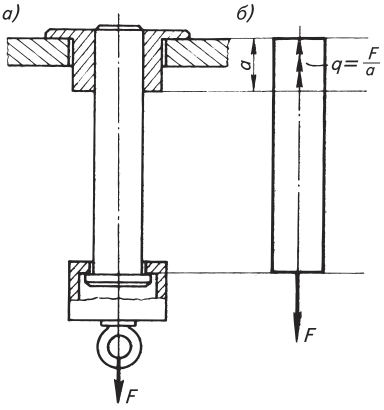


Рис. 1.4

Рассмотрим стержень (рис. 1.4, *а*), работающий на растяжение. Верхний конец стержня запрессован во втулку. Нижний конец через промежуточную деталь нагружен растягивающей силой.

Расчетная схема нагружения стержня представлена на рис. 1.4, *б*. Действие силы F — пример сосредоточенной нагрузки. Усилие от втулки к стержню передается по длине a, поэтому можно его рассматривать как распределенное с интенсивностью q. Интенсивность распределенной нагрузки — нагрузка, приходящаяся на единицу длины бруса (выражается в Н/м):

$$q = F/a.$$

При учете собственного веса бруса определяется интенсивность распределенной нагрузки от собственного веса (вес единицы длины бруса) (Н/м):

$$q = \frac{G}{l} = \frac{\gamma A l}{l} = \gamma A,$$

где G — вес бруса; A — площадь поперечного сечения бруса; l — длина бруса; γ — удельный вес материала бруса: $\gamma = g\rho$, здесь ρ — плотность материала бруса, g — ускорение свободного падения (размерности — см. Приложение 6).

Задача 1. **Для бруса (рис. 1.5) построить эпюру продольных сил.**

1. Определяем реакцию в заделке. Предварительно произвольно направляем реакцию R.

В данной и во всех других задачах с заделкой не обязательно определять реакцию R, так как, рассматривая нагрузки от свободно-

го конца бруса (в данном случае справа налево), можно определить во всех сечениях продольную силу. Продольная сила, полученная для крайнего левого сечения бруса (т. е. для заделки), и будет представлять собой реакцию в заделке.

Однако для контроля правильности расчета продольных сил полезно вначале определить реакцию R из условия равновесия, т. е. сумма проекций всех сил на продольную ось бруса должна быть равна нулю:

$$\sum F_x = R - 3F + 2F - F = 0 \Rightarrow R = 2F.$$

Используем в этой задаче только одно уравнение равновесия. Остальные два уравнения тождественно удовлетворяются: сумма проекций всех сил на ось y, перпендикулярную x, всегда равна нулю, так как равна нулю каждая проекция. Сумма моментов относительно любой точки, лежащей на оси x, также будет всегда равна нулю, так как ни одна из сил не создает момента (плечо каждой силы равно нулю).

Полученный знак плюс для реакции свидетельствует о правильности выбранного направления вектора R. Если бы реакция получалась отрицательной, то следовало бы изменить направление вектора R на противоположное.

2. Разбиваем брус на три участка. Проводим произвольные сечения, задаем координату сечения на каждом участке (рис. 1.5, *а*). В данной задаче на каждом участке начало координат взято в крайнем правом сечении участка.

Задание координаты сечения на участке однозначно определяет, с какой стороны от сечения суммировать внешние силы при определении внутреннего силового фактора. Если начало координат находится справа, то рассматриваются все внешние нагрузки, лежащие справа от сечения, и наоборот.

3. Составляем уравнения для продольной силы по участкам.

I участок: пределы изменения координаты сечения $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Мысленно отбрасываем часть бруса справа от сечения. Согласно определению, продольная сила равна сумме всех внешних нагрузок, лежащих по одну сторону справа от сечения. Справа от сечения имеется только одна сила, которая действует на данное сечение, вызывая сжатие левой от сечения части бруса, поэтому (рис. 1.5, *б*)

$$N = -F.$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$. Продольная сила в сечении равна сумме всех внешних сил, действующих справа от сечения. Справа от сечения действует сила F, вызывая сжатие, и сила $2F$, вызывая

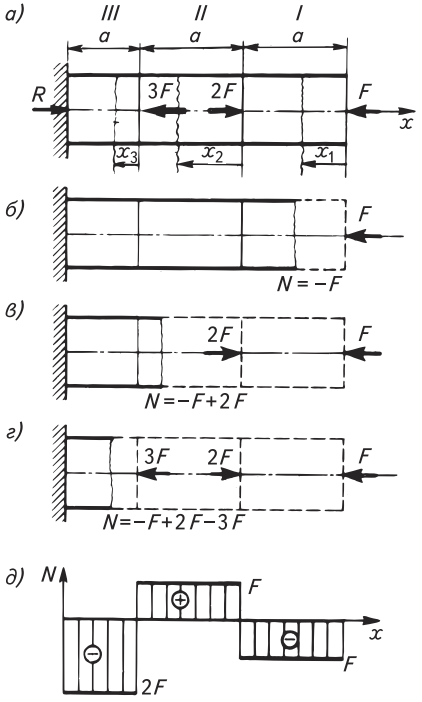


Рис. 1.5

растяжение оставшейся левой части бруса, поэтому (рис. 1.5, *в*)

$$N = -F + 2F = F.$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$. Рассуждая аналогично, получим (рис. 1.5, *г*)

$$N = -F + 2F - 3F = -2F.$$

Продольная сила N в заделке совпала по величине и направлению с реакцией R (знак минус для N на III участке говорит о том, что на этом участке действует сжимающая сила), причем рассмотрение внешних сил справа от сечения позволяет определить продольную силу в каждом сечении, не определяя реакцию в заделке.

4. По полученным уравнениям строим эпюру продольных сил. Так как на каждом участке продольная сила — величина постоянная, то графики продольных сил — прямые, параллельные координатной оси x. Откладываем в произвольном масштабе значения N на каждом участке и строим эпюру (рис. 1.5, *д*).

Как видно из эпюры, в каждом сечении, в котором к брусу приложена сосредоточенная сила, продольная сила меняется скачком. Таким образом, на эпюре N в сечении, где приложена сосредоточенная сила, должен быть скачок на значение этой силы. В данной задаче к брусу приложены четыре сосредоточенные силы. На эпюре имеем четыре скачка N, каждый скачок соответствует сосредоточенной силе.

Эпюры принято штриховать прямыми линиями, перпендикулярными продольной оси x. Каждая ордината эпюры в принятом масштабе дает значение продольной силы в поперечном сечении бруса с данной координатой. На эпюре иногда указываются знаки продольных сил (плюс — для положительных, минус — для отрицательных сил).

Эпюра показывает, что брус под действием внешних сил на I и III участках испытывает сжатие, на II — растяжение с усилиями, известными из расчета.

Задача 2. **Построить эпюру продольных сил для бруса (рис. 1.6, *а*), если известны значения** a, F.

1. Определяем реакцию заделки R. Предварительно направляем реакцию вверх. Составляем уравнение равновесия — сумма всех сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum F_x = R + F - 2F = 0 \Rightarrow R = F.$$

Решение со знаком плюс говорит о правильном выборе направления реакции.

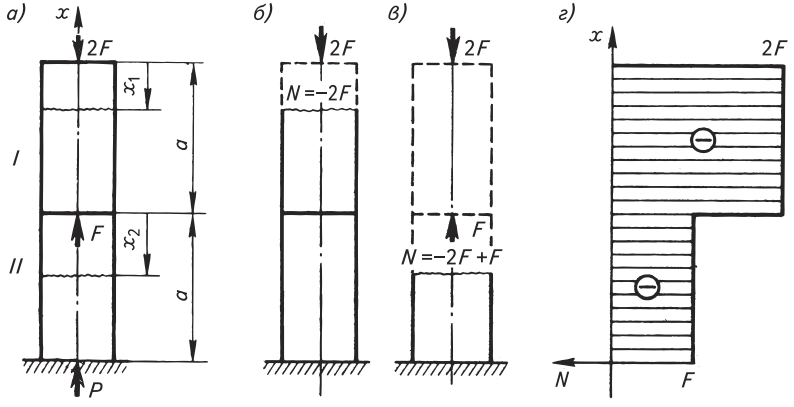


Рис. 1.6

2. Разбиваем брус на два участка, проводим произвольные сечения на каждом участке, задаем координаты сечений.

3. Определяем продольную силу N по участкам.

I участок: пределы изменения координаты произвольного сечения $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Продольная сила в сечении равна сумме внешних сил, действующих вверх от сечения. Сверху от сечения действует сила $2F$, которая вызывает сжатие в оставшейся части бруса (рис. 1.6, *б*); следовательно, $N = -2F$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$. Продольное усилие в сечении равно сумме внешних сил, действующих сверху от сечения (рис. 1.6, *в*), $N = -2F + F = -F$.

4. Строим эпюру N (рис. 1.6, *г*). Эпюра показывает, что весь брус испытывает деформацию сжатия. Наиболее нагруженным является I участок, он испытывает сжатие с усилием $2F$, а II участок — с усилием F. Три скачка на эпюре соответствуют трем сосредоточенным силам, действующим на брус, включая реакцию в заделке.

Задача 3. **Построить эпюру для бруса, нагруженного сосредоточенными и распределенной нагрузками (рис. 1.7), если известны величины** a, b, c, $F_1 = F$, $F_2 = 3F$, $q = F/b$.

1. Определим реакцию R. Составим уравнение равновесия: сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю. Когда на брус действует распределенная нагрузка (в данном случае равномерная с интенсивностью q), в уравнение равновесия следует включить равнодействующую этой нагрузки (для рассматриваемого случая эта равнодействующая равна qb)

$$\sum F_x = -R + F_2 - qb - F_1 = 0,$$

или, подставляя значения q, F_1, F_2, получим

$$R = F.$$

2. Разбиваем брус на три участка, проводим произвольные сечения на каждом участке, задаем координаты этих сечений.

3. Определяем уравнения для N по участкам, рассматривая внешние нагрузки вниз от сечения:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = F_1 = F$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $N = F_1 + qx_2 = F + \dfrac{F}{b}x_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant c$; $N = F_1 + qb - F_2 = F + \dfrac{F}{b}b - 3F = -F$.

4. Строим эпюру N по полученным уравнениям.

На II участке функция N от x представляет собой линейную зависимость, график которой есть наклонная прямая. Строим график по двум крайним значениям в начале и в конце участка:

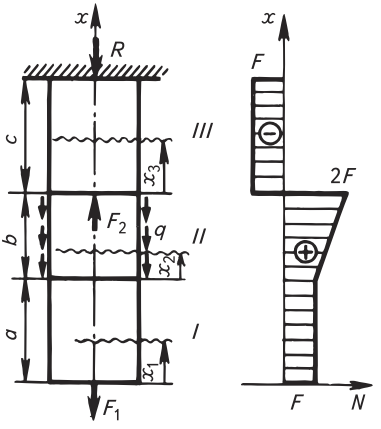


Рис. 1.7

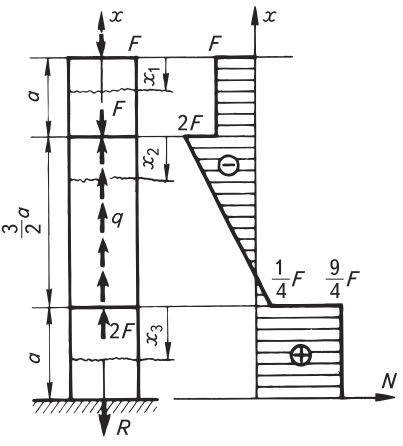


Рис. 1.8

при $x_2 = 0$ получим $N = F$;

при $x_2 = b$ получим $N = F + \dfrac{F}{b}b = 2F$.

Соединяя эти точки прямой, получим график искомой линейной зависимости.

Как видно из эпюры, при действии на брус распределенной осевой нагрузки продольная сила на участке, на котором такая нагрузка приложена, меняется непрерывно. Если интенсивность нагрузки на участке постоянная ($q = \text{const}$), то на эпюре будет наклонная прямая. На участках, где нет распределенной нагрузки, на эпюре будут прямые, параллельные оси x. Эпюра показывает, что участки I и II испытывают растяжение, участок III — сжатие, наиболее нагруженным является сечение с координатой $x_2 = b$. В этом сечении действует растягивающее усилие, равное $2F$. На эпюре три скачка, один соответствует реакции в заделке, второй — силе $F_2 = F_3$, третий — силе $F_1 = F$.

Задача 4. **Построить эпюру продольных сил для бруса (рис. 1.8), если заданы** a, F, $q = 3F/(2a)$.

1. Определим реакцию в заделке. Из уравнения равновесия находим

$$\sum F_x = -F - F + 2F + q\frac{3}{2}a - R = 0 \Rightarrow R = \frac{9}{4}F.$$

2. Разбиваем брус на три участка, проводим сечения и задаем на каждом координату сечения так, чтобы рассматривать силы,

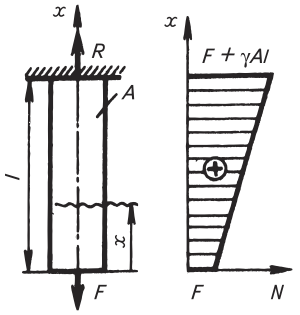


Рис. 1.9

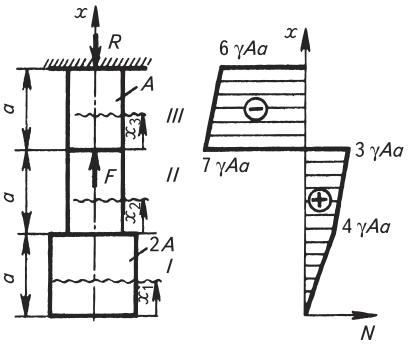


Рис. 1.10

лежащие вверх от сечения, т. е. исключаем реакцию в заделке из рассмотрения при определении выражений для N.

3. Составим выражения для N по участкам, рассматривая силы по одну сторону — вверх от сечения:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = -F$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{3}{2}a$; $N = -F - F + qx_2 = -2F + \dfrac{3}{2}\dfrac{F}{a}x_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = -F - F + q\dfrac{3}{2}a + 2F = \dfrac{9}{4}F$.

4. По полученным уравнениям строим эпюру N. Скачок в заделке равен реакции в заделке. Скачки в других сечениях соответствуют внешним силам, приложенным в этих сечениях.

Задача 5. **Построить эпюру N для бруса (рис. 1.9) с учетом собственного веса, если заданы l, γ, A, F. Необходимо помнить, что в этих задачах вес стержня равен произведению удельного веса на объем.**

1. Определяем реакцию R. Вес стержня равен γAl. Составляем уравнение равновесия — сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum F_x = R - \gamma Al - F = 0 \Rightarrow R = \gamma Al + F.$$

2. Имеем только один участок, проводим произвольное сечение, задаем координату его от крайнего нижнего сечения.

3. Запишем уравнение для N. Продольная сила равна сумме всех внешних сил, лежащих вниз от сечения. Ниже сечения действует сила F и вес нижележащей части бруса, который равен произведению удельного веса на объем: γAx.

Продольная сила в сечении, отстоящем на расстоянии x от нижнего сечения бруса, будет равна

$$N = F + \gamma A x.$$

Получим линейную зависимость N от x. Строим эпюру по двум крайним точкам:

при $x = 0$ получим $N = F$;

при $x = l$ получим $N = F + \gamma A l$.

4. Строим эпюру N. Как видно из эпюры, наиболее нагруженным является сечение заделки. На эпюре два скачка. Один в заделке — он соответствует реакции, другой — в сечении, где приложена сила F, и он равен этой силе.

Задача 6. **Построить эпюру N для бруса (рис. 1.10) с учетом собственного веса, если заданы a, γ, A, $F = 10\gamma Aa$.**

1. Определяем реакцию R:

$$\sum F_x = -R - \gamma A 2a + F - \gamma 2Aa = 0 \Rightarrow R = 6\gamma Aa.$$

2. Разбиваем брус на три участка.

3. Определяем N по участкам.

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Продольное усиление в произвольном сечении на I участке равно сумме всех сил, лежащих вниз от сечения. Но вниз от сечения действует только вес нижележащей части стержня, который равен произведению удельного веса на объем нижележащей части: $N = \gamma 2Ax_1$. Определяем значение N в начале и в конце участка: при $x_1 = 0$ получим $N = 0$, при $x_1 = a$ получим $N = 2\gamma 4a$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$. Продольное усилие в произвольном сечении II участка равно весу I участка плюс вес нижележащей части бруса II участка:

$$N = \gamma 2Aa + \gamma A x_2.$$

Определяем значения N в начале и в конце участка:

при $x_2 = 0$ получим $N = 2\gamma Aa$;

при $x_2 = a$ получим $N = 3\gamma Aa$.

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$. Продольное усилие в произвольном сечении III участка равно сумме весов I и II участков, внешней силе и весу нижележащей части III участка:

$$N = 2\gamma Aa + \gamma Aa - F + \gamma A x_3 = -7\gamma Aa + \gamma A x_3.$$

Определяем значения N в начале и в конце участка:

при $x_3 = 0$ получим $N = -7\gamma Aa$;

при $x_3 = a$ получим $N = -6\gamma Aa$.

4. Строим эпюру N. На все участках это наклонные прямые, причем наклон прямых (коэффициент при x) определяется площадью сечения и удельным весом материала стержня. Наиболее

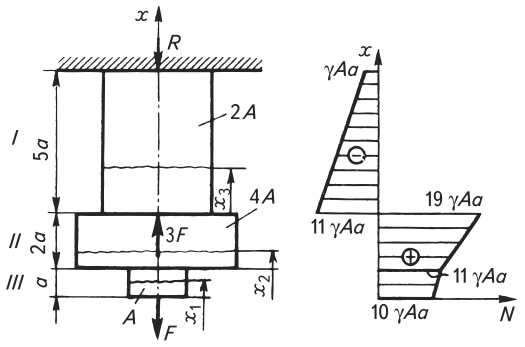


Рис. 1.11

нагруженным является сечение $x_3 = 0$, оно испытывает сжатие с усилием $7\gamma Aa$.

Задача 7. **Построить эпюру N с учетом собственного веса бруса (рис. 1.11), если заданы a, γ, A, $F = 10\gamma Aa$.**

1. Определяем реакцию в заделке. Предварительно направляем ее вверх. Составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_x = R - \gamma 2A5a + 3F - \gamma 4A2a - \gamma Aa - F = 0.$$

Подставляем значение F, тогда $R = -\gamma Aa$. Знак минус говорит о том, что направление реакции надо изменить на противоположное. Направляем ее вниз и вносим соответствующее изменение (изменяем знак при R на минус) в уравнение равновесия, тогда решение получим со знаком плюс: $R = \gamma Aa$.

2. Разбиваем брус на три участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты сечения.

3. Записываем уравнения для N:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = 10\gamma Aa + \gamma Ax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $N = 11\gamma Aa + 4\gamma Ax_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 5a$; $N = -11\gamma Aa + 2\gamma Ax_3$.

4. Строим эпюру N. Согласно эпюре, I и II участки бруса испытывают растяжение, а III участок — сжатие.

Задача 8. **Требуется построить эпюру N для бруса (рис. 1.12), если заданы a, F, $q = F/a$.**

1. Определяем реакцию R:

$$\sum F_x = R - 4qa - 4F + 2qa + F = 0 \Rightarrow R = 5F.$$

2. Разбиваем брус на три участка, задаем координаты сечений, начало координат помещаем в крайнее нижнее сечение участка.

3. Составляем уравнения для N по участкам, рассматривая внешние нагрузки, лежащие ниже сечения:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $N = -F - qx_1 = -F - \dfrac{F}{a}x_1$;

при $x_1 = 0$ получим $N = -F$, при $x_1 = 2a$ получим $N = -3F$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -F - q \cdot 2a = -3F$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 4a$; $N = -F - q \cdot 2a + 4F + qx_3 = F + \dfrac{F}{a}x_3$;

при $x_3 = 0$ получим $N = F$; при $x_3 = 4a$ получим $N = 5F$ (соответствует реакции $R = 5F$).

4. Строим эпюру N.

Задача 9. **Построить эпюру продольных сил для бруса (рис. 1.13). Известны силы F и $2F$, действующие на брус, длина l, площадь сечения бруса A, плотность материала ρ.**

Данная задача существенно отличается от предыдущих тем, что брус не закреплен и сумма действующих на него сил не равна нулю. Следовательно, согласно второму закону Ньютона, он будет

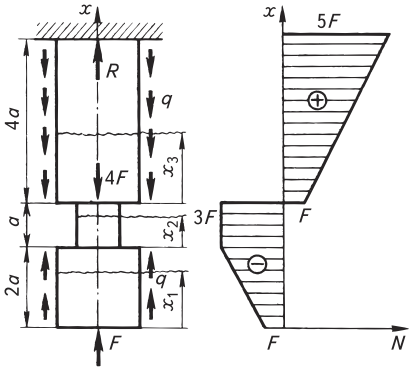


Рис. 1.12

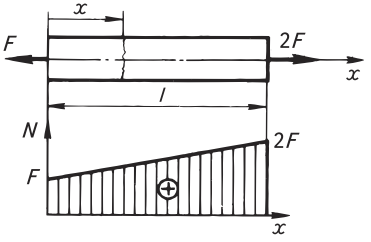


Рис. 1.13

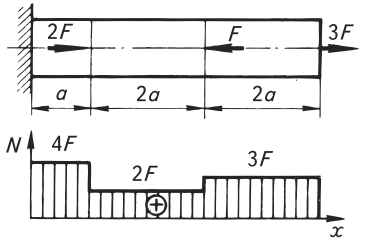


Рис. 1.14

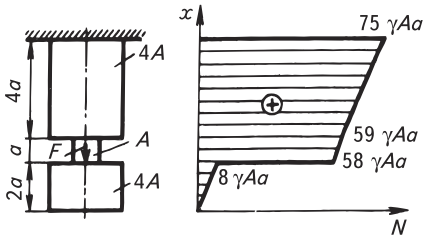


Рис. 1.15

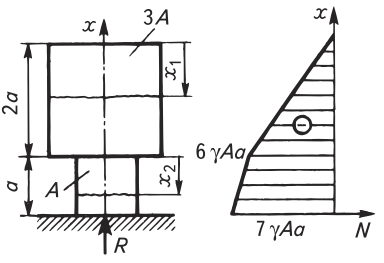


Рис. 1.16

двигаться равномерно ускоренно в направлении действия большей силы с ускорением $a = F/M$, где $M = \rho Al$ — масса бруса.

В результате на тело кроме активных сосредоточенных сил будет действовать объемная распределенная сила инерции $F_{\text{ин}} = Ma = F$ в направлении, обратном движению, с интенсивностью $q = F_{\text{ин}}/l = F/l$. В произвольном сечении эта сила инерции

$$F_{\text{ин}}(x) = a\rho A x_1 = F\frac{x}{l}.$$

Записываем уравнение для продольной силы в сечении x. Она равна сумме всех внешних сил, действующих на часть бруса слева от сечения:

$$N = F + F_{\text{ин}}(x) = F + F\frac{x}{l}.$$

Продольная сила линейно возрастает в зависимости от координаты x. Для построения эпюры определяем значение N в начале и конце стержня:

при $x = 0$ получим $N = F$;

при $x_1 = l$ получим $N = 2F$. По этим двум крайним точкам строим эпюру.

Задача 10. **Заданы a, F. Построить эпюру N (рис. 1.14).**

Задача 11. **Заданы a, γ, A, $F = 50\gamma Aa$. Построить эпюру N с учетом веса (рис. 1.15).**

Задача 12. **Заданы a, γ, A. Построить эпюру N для бруса с учетом веса (рис. 1.16).**

1.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Кручение — деформация, вызванная парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси бруса (рис. 1.17).

При кручении в каждом сечении бруса действует только *один* внутренний силовой фактор — крутящий момент M_x или T.

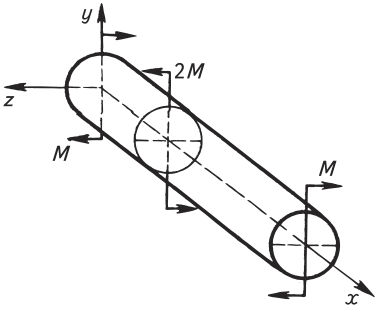


Рис. 1.17

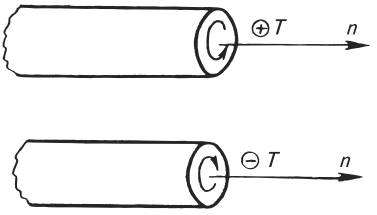


Рис. 1.18

Крутящий момент представляет собой результирующий момент всех внутренних касательных напряжений в рассматриваемом сечении и равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения, т. е.

$$T = \int_A \tau\rho \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{xi}.$$

Условно принято считать крутящий момент *положительным*, если при взгляде на сечение бруса со стороны внешней нормали к сечению он будет направлен против часовой стрелки (рис. 1.18).

Внешние скручивающие моменты, как и внешние силы, могут быть *сосредоточенными* и *распределенными.* Например, передаваемый штифтом крутящий момент можно рассматривать как сосредоточенный (рис. 1.19, *а*), передаваемый шпонкой — как распределенный по длине l (рис. 1.19, *б*).

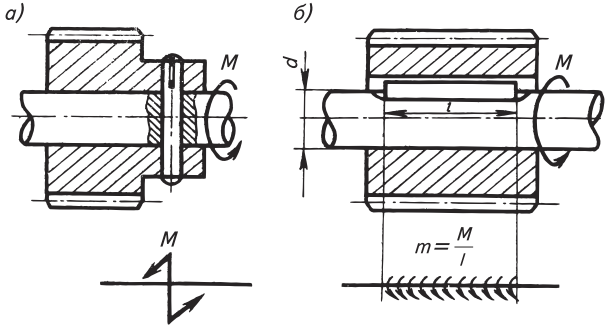


Рис. 1.19

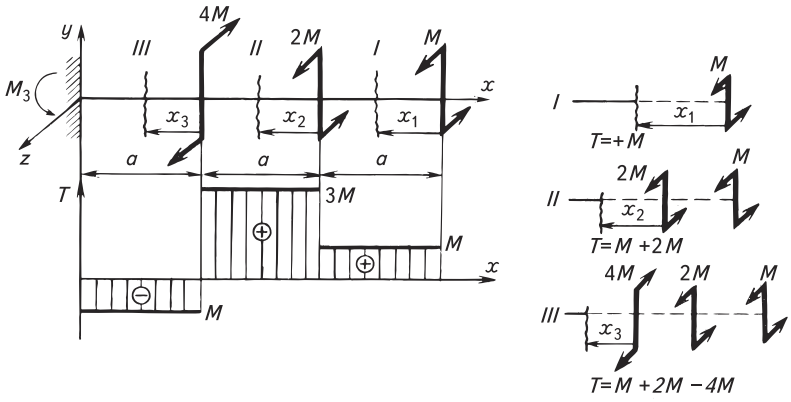


Рис. 1.20

Интенсивность распределенного крутящего момента — это момент, приходящийся на единицу длины бруса (Н · м/м):

$$m = M/l.$$

При составлении уравнений для крутящего момента рекомендуется не менять направление обхода участков, т. е. рассматривать моменты с одного конца. Это позволит избежать ошибок при определении знаков моментов.

Задача 1. **Построить эпюру крутящих моментов для бруса (рис. 1.20), если заданы** a **и** M**.**

1. Определяем момент в заделке $M_з$; предварительно произвольно его направляем, как это показано на рис. 1.20. Строго — задача пространственная и необходимо использовать шесть уравнений равновесия. Но так как сил, действующих на брус, нет, то тождественно удовлетворяются три уравнения равновесия, представляющие собой проекции сил на координатные оси. Также тождественно удовлетворяются два других уравнения, представляющие собой сумму моментов относительно осей y и z. Таким образом, остается одно уравнение равновесия — сумма моментов, действующих на брус, относительно оси x должна быть равна нулю:

$$\sum M_x = M + 2M - 4M + M_з = 0,$$

откуда $M_з = M$. Знак плюс говорит о правильном выборе направления момента в заделке.

2. Разбиваем брус на три участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты этих сечений, начало координат помещаем

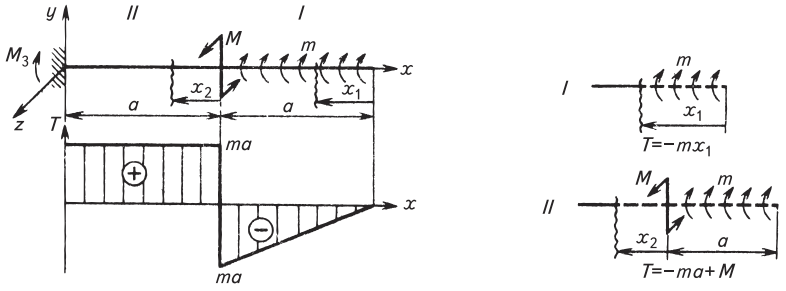


Рис. 1.21

справа. Это означает, что при определении крутящего момента будем рассматривать внешние моменты справа от сечения.

3. Записываем уравнения для T по участкам. По определению, крутящий момент в произвольном сечении равен сумме всех внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону (справа) от сечения.

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = M$. Справа от сечения действует только один момент M, который действует против часовой стрелки по отношению к внешней нормали к сечению.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $T = M + 2M = 3M$. Справа от сечения действуют моменты M и $2M$. Направления их действия совпадают.

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $T = M + 2M - 4M = -M$. Справа от сечения действуют моменты M, $2M$ и $4M$. Момент $4M$ действует в противоположном направлении.

4. Строим эпюру T. Так как значения крутящих моментов на участках постоянны, т. е. не зависят от x, то строим эпюры без дополнительных вычислений. Эпюры — прямые, параллельные оси x.

Наиболее нагруженным является II участок. Скачки на эпюрах соответствуют действующим моментам.

Задача 2. **Построить эпюру T для бруса (рис. 1.21), если заданы** a, m, $M = 2ma$.

1. Направляем произвольно момент в заделке и составляем уравнение равновесия для его определения:

$$\sum M_x = -ma + M - M_з = 0 \Rightarrow M_з = ma.$$

2. Разбиваем брус на два участка.

3. Крутящий момент равен сумме всех внешних скручивающих моментов, действующих справа от сечения. На I участке справа от сечения действует распределенный момент интенсивностью m. На участке бруса до сечения его величина будет равна произведению

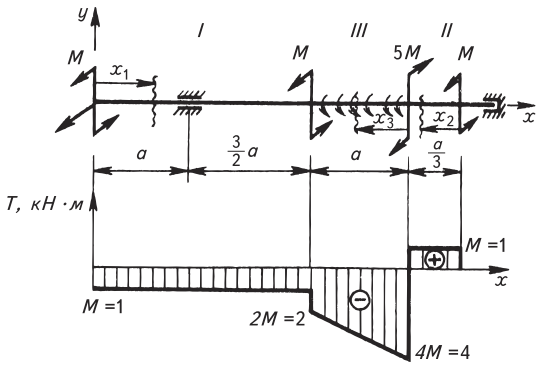


Рис. 1.22

интенсивности на длину его распределения до сечения: mx_1. На II участке справа от сечения действуют распределенный по длине a момент $-ma$ и сосредоточенный момент другого знака M. Исходя из этих рассуждений, записываем уравнения для крутящего момента по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = -mx_1$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $T = -ma + M = ma$.

4. Строим эпюру крутящих моментов. На I участке получили линейную зависимость. Определяем значения T в начале и в конце участка:

при $x_1 = 0$ получим $T = 0$;

при $x_1 = a$ получим $T = -ma$.

На эпюре два скачка. Один соответствует моменту M, другой — моменту в заделке. Скачки соответствуют значениям этих моментов.

Задача 3. **Построить эпюру крутящих моментов для вала (рис. 1.22), вращающегося с постоянной угловой скоростью, если заданы** $a = 10$ см, $M = 1$ кН$\cdot$м, $m = 2M/a = 0,2$ кН$\cdot$м/см.

В предыдущих задачах строилась эпюра крутящих моментов для неподвижного бруса, один конец которого жестко закреплен. В настоящей задаче рассчитывается вал, совершающий равномерное вращение. Очевидно, в этом случае вал должен находиться в динамическом равновесии, т. е. сумма крутящих моментов, действующих на вал, должна быть равна нулю. Проверим это положение. Считаем, что моменты трения в подшипниках пренебрежимо малы.

1. Составляем сумму моментов относительно оси x:

$$\sum M_x = M - 5M + ma + M + M = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

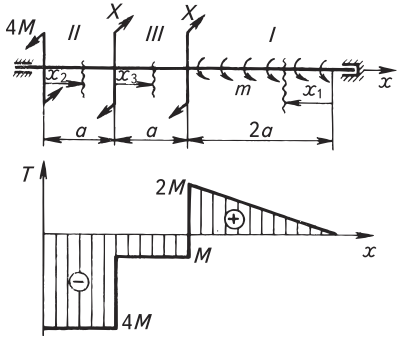


Рис. 1.23

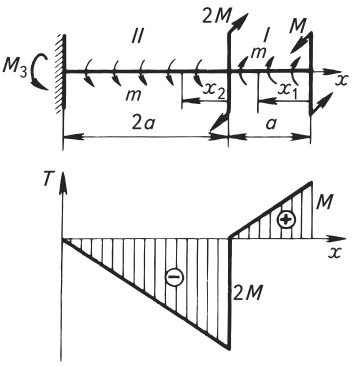


Рис. 1.24

Следовательно, вал находится в равновесии, т. е. вращается с постоянной угловой скоростью.

2. Разбиваем вал на три участка, проводим произвольные сечения на каждом участке, задаем координаты сечений. На I участке рассматриваем внешние моменты слева, а на II и III — справа от сечения.

3. Записываем уравнения для T (кН $\cdot$ м) по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{5}{2}a$; $T = -M = -1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{1}{2}a$; $T = M = 1$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $T = M - 5M + mx_3 = -4 + 0{,}2x_3$.

4. Строим эпюру T. На III участке зависимость для T линейная, вычисляем T в начале и конце участка:

при $x_3 = 0$ получим $T = -4M = -4$ кН $\cdot$ м;

при $x_3 = a$ получим $T = -4M + ma = -2$ кН $\cdot$ м.

Эпюры на участках, где T — постоянная величина, — прямые, параллельные оси x, эпюра на III участке, где T — линейная зависимость, — наклонная прямая. В каждом сечении, где действует сосредоточенный момент, на эпюре — скачок на величину соответствующего момента. Наиболее нагруженное сечение — сечение с координатой $x_3 = 0$, максимальный крутящий момент $T = 4$ кН $\cdot$ м.

Задача 4. **Определить моменты X. Построить эпюру крутящих моментов для вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью (рис. 1.23), если заданы a, M, $m = M/a$.**

1. Определяем значения внешних моментов X из условия равномерного вращения вала. Сумма моментов относительно оси вала

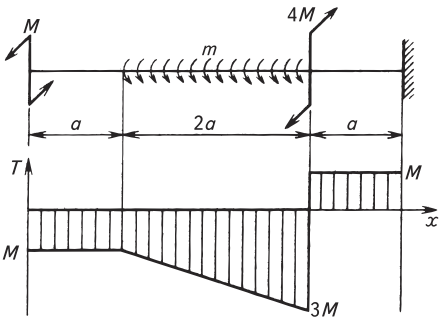


Рис. 1.25

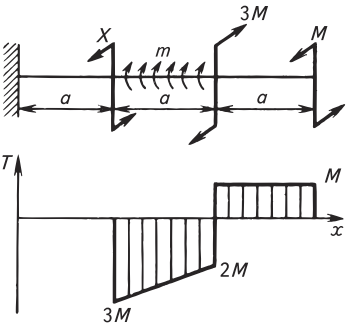


Рис. 1.26

должна быть равна нулю:

$$\sum M_x = m \cdot 2a - 2X + 4M = 0, \quad \text{откуда} \quad X = 3M.$$

2. Разбиваем вал на три участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты сечений.

3. Записываем уравнения для T по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $T = mx_1 = \dfrac{M}{a}x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $T = -4M$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $T = -4M + 3M = -M$.

4. Строим эпюру T. На эпюре три скачка в сечениях, где действуют три сосредоточенных момента: X, X и $4M$. По величине скачки равны этим моментам.

Задача 5. **Построить эпюру крутящих моментов для бруса (рис. 1.24), если заданы** a, M, $m = M/a$.

1. Определяем момент в заделке:

$$\sum M_x = M - ma - 2M + m \cdot 2a + M_з = 0 \Rightarrow M_з = 0.$$

2. Разбиваем брус на два участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты сечений.

3. Записываем уравнения для T:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = M - mx_1 = M - \dfrac{M}{a}x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $T = M - ma - 2M + mx_2 = -2M + \dfrac{M}{a}x_2$.

4. Строим эпюру T. Отсутствие скачка в заделке на эпюре T подтверждает равенство нулю момента в заделке.

Задача 6. **Построить эпюру крутящих моментов для бруса (рис. 1.25), если заданы** a, M, $m = M/a$.

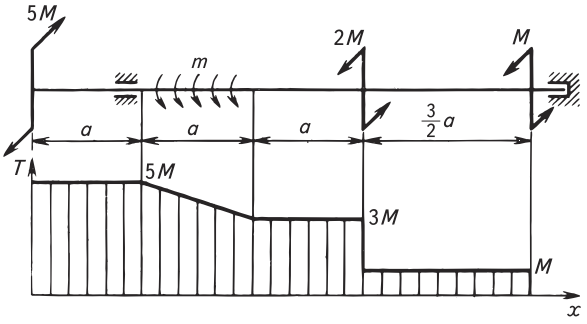


Рис. 1.27

Задача 7. **Определить момент X, при котором момент в заделке равен нулю, построить эпюру крутящих моментов, если заданы a, M, $m = M/a$ (рис. 1.26).**

Задача 8. **Построить эпюру крутящих моментов для вала, вращающегося равномерно (рис. 1.27), если заданы** a, M, $m = 2M/a$.

1.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Прямой изгиб — деформация, вызванная силами, перпендикулярными оси бруса, действующими в одной из главных плоскостей бруса, и парами сил, действующими в той же плоскости. *Главная плоскость* — плоскость, проходящая через ось бруса и одну из главных центральных осей инерции сечения. Плоскость xOy (рис. 1.28) — плоскость действия нагрузок — главная плоскость, т. е. она проходит через ось бруса x и главную центральную ось y.

При таком изгибе в каждом сечении балки действуют только *два* внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий

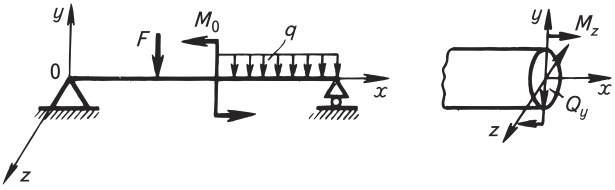


Рис. 1.28

момент M_z. В дальнейшем при изгибе в одной плоскости будем писать просто Q и M вместо Q_y и M_z.

Поперечная сила Q — результирующая всех внутренних касательных напряжений в рассматриваемом сечении, численно равная алгебраической сумме всех внешних сил, приложенных по дну сторону от сечения, т. е.

$$Q = \int_A \tau \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} F_{yi}.$$

Изгибающий момент M — результирующий момент всех нормальных внутренних напряжений в рассматриваемом сечении относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости действия нагрузки, численно равный алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от сечения, т. е.

$$M = \int_A \sigma y \mathrm{d}A = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{zi}.$$

При построении эпюр применяют правило знаков для Q и M: положительные (рис. 1.29, *а*) и отрицательные (рис. 1.29, *б*) направления для Q и M зависят от того, рассматриваются ли нагрузки слева или справа от сечения.

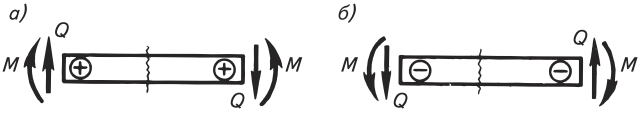


Рис. 1.29

Полезно напомнить из курса теоретической механики (статика), что для плоской системы сил уравнения равновесия, составляемые для определения опорных реакций, можно написать в трех различных вариантах:

а) в виде сумм проекций сил на две координатные оси и суммы моментов относительно любой точки, лежащей на оси бруса:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_A = 0;$$

б) в виде суммы проекций сил на ось, перпендикулярную оси бруса, и двух сумм моментов относительно любых точек, лежащих на оси бруса:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0;$$

в) в виде трех сумм моментов относительно любых точек, не лежащих на оси бруса:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

При составлении уравнений равновесия следует заменить распределенную нагрузку ее равнодействующей.

Желательно уравнения равновесия составлять так, чтобы по возможности обойтись без совместного их решения, т. е. так, чтобы в каждое уравнение входила только одна реакция.

Для проверки правильности определения опорных реакций рекомендуется подставить полученные значения в какое-либо уравнение равновесия, не использованное ранее. При правильном определении реакций должно получиться тождество $0 \equiv 0$.

При построении эпюр Q и M необходимо руководствоваться правилами контроля построения эпюр, которые основываются на двух дифференциальных зависимостях:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = q.$$

Если рассматривать эпюру M как график функции $M = M(x)$, то эпюра Q будет графиком первой производной от M по x. Графически первая производная, т. е. поперечная сила, численно равна тангенсу угла наклона касательной к эпюре M: $Q = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 1.30).

Эта зависимость позволяет установить **правила**, которые определяют характер эпюр Q и M и применяются **для контроля** их правильности.

1. Если на участке отсутствует распределенная нагрузка, т. е. $q = 0$, то эпюра Q на этом участке представляет собой прямую, параллельную оси x, эпюра M — наклонную.

2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой, т. е. $q = \mathrm{const}$, эпюра Q представляет собой наклонную прямую, эпюра M — квадратичную параболу, выпуклостью направленную навстречу q.

3. Если на участке поперечная сила положительна, т. е. $Q > 0$, то изгибающий момент возрастает; если на участке поперечная сила отрицательна, т. е. $Q < 0$, то изгибающий момент убывает (при правосторонней системе координат, когда направление оси x выбрано слева направо); если на участке поперечная сила равна нулю, т. е. $Q = 0$, то изгибающий момент постоянен.

4. Если перерезывающая сила пересекает ось x, то в сечении, где $Q = 0$, изгибающий момент имеет экстремальное значение.

5. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, эпюра Q имеет скачок на величину силы, на эпюре M скачкообразно изменяется угол наклона эпюры.

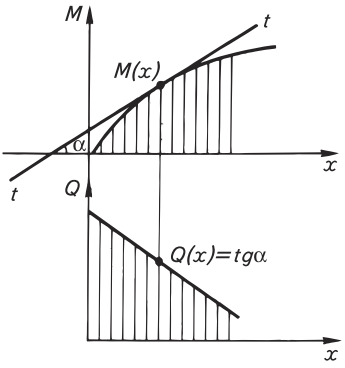


Рис. 1.30

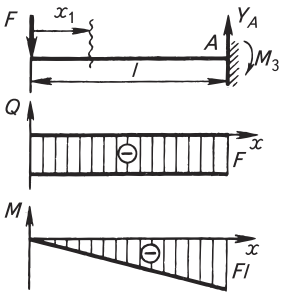


Рис. 1.31

6. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре Q это никак не отражается, на эпюре M — скачок на величину сосредоточенного момента.

7. В сечении, где начинается или заканчивается распределенная нагрузка, на эпюре Q — скачкообразное изменение угла наклона, на эпюре M — плавное сопряжение прямой и параболы.

8. В сечении на опорах перерезывающая сила и изгибающий момент численно равны опорной реакции и моменту в заделке или опоре, если такой приложен. Если в шарнирной опоре не приложен сосредоточенный момент, то скачка изгибающего момента на эпюре не должно быть.

Задача 1. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.31), если заданы l, F.**

1. Определяем реакции в заделке. Предварительно произвольно направляем реакцию и момент в заделке в противоположную сторону действия силы F и момента от этой силы. Составим уравнения равновесия — сумма проекций сил на ось y, сумма моментов относительно точки A должны быть равны нулю:

$$\sum F_y = -F + Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = F;$$

$$\sum M_A = Fl - M_з = 0 \Rightarrow M_з = Fl.$$

Решения получились со знаком плюс, что говорит о правильном выборе направлений. Третье уравнение — сумма проекций сил на горизонтальную ось — тождественно удовлетворяется, так как проекции сил F и Y_A на ось x равны 0. Ввиду простоты расчетов проверку правильности определения реакций не проводим.

2. Определяем число участков и их границы, проводим произвольные сечения от крайнего левого сечения. Имеем один участок, координата произвольного сечения которого изменяется в пределах $0 \leqslant x \leqslant l$. Начало координат произвольного сечения задаем слева, поэтому при определении выражений для Q и M будем рассматривать внешние нагрузки, приложенные слева от сечения.

3. Определяем уравнения для Q и M. Для всех задач с заделкой, рассматривая внешние нагрузки от свободного конца балки, можно построить эпюры Q и M, не определяя реакций.

I участок: пределы изменения координаты сечения $0 \leqslant x \leqslant l$.

Поперечная сила в сечении равна сумме внешних сил, действующих слева от сечения. Слева от сечения действует только сила F. По правилу знаков сила отрицательна, т. е. $Q = -F$. Изгибающий момент в сечении будет равен моменту от силы F со знаком минус, т. е. $M = -Fx$.

4. Строим эпюры Q и M:

при $x = 0$ получим $Q = -F$; $M = 0$;
при $x = l$ получим $Q = -F$; $M = -Fl$.

По всей длине балки поперечная сила постоянна и отрицательна; из правил контроля следует, что на эпюре изгибающего момента должна быть наклонная прямая и значения момента должны убывать.

В заделке скачок на эпюре поперечных сил совпал по величине с реакцией Y_A, а скачок на эпюре изгибающих моментов — с моментом в заделке $M_з$, что подтверждает правильность эпюр.

Задача 2. **Построить эпюры Q и M для консольной балки длиной l, нагруженной распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q (рис. 1.32).**

1. Как и в предыдущей задаче, реакции в заделке можно не определять, если идти от свободного конца балки.

Однако для дополнительного контроля правильности построения эпюр определим реакции, составив два уравнения равновесия. Предварительно направляем реакцию и момент в заделке в сторону, противоположную действию нагрузки:

$$\sum F_y = -ql + Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = ql;$$

$$\sum M_A = ql\frac{l}{2} - M_з = 0 \Rightarrow M_з = \frac{1}{2}ql^2.$$

В случае действия распределенной нагрузки при определении реакций следует заменить эту нагрузку ее равнодействующей; она равна ql, приложена посередине, поэтому момент ее равен $ql\dfrac{1}{2}$.

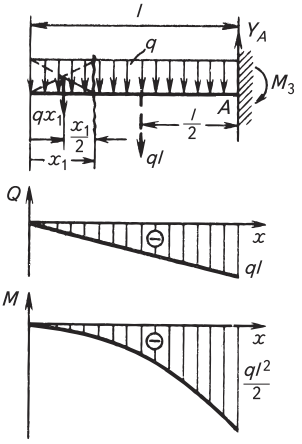


Рис. 1.32

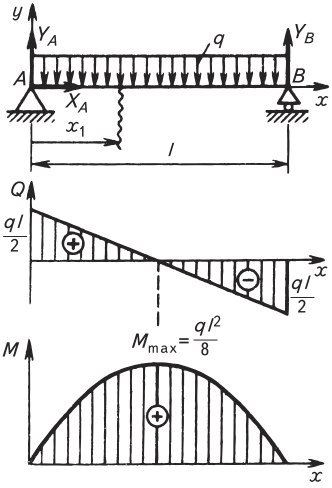


Рис. 1.33

2. Имеем один участок. Проводим произвольное сечение и задаем координату x сечения от левого конца балки. Пределы изменения координаты $0 \leqslant x \leqslant l$.

3. Определяем уравнения для Q и M. Поперечная сила в сечении будет равна сумме распределенных сил, а изгибающий момент — сумме моментов распределенных сил, действующих от конца балки до сечения. С учетом знаков (см. рис. 1.29) получим:

$Q = -qx_1$ — наклонная прямая;

$M = -qx_1\dfrac{x_1}{2} = -\dfrac{1}{2}qx_1^2$ — парабола.

Здесь qx_1 — равнодействующая равномерно распределенной нагрузки в пределах части балки длиной x_1. Она приложена посередине, поэтому ее момент относительно рассматриваемого сечения равен произведению силы qx_1 на ее плечо $x_1/2$.

4. Строим эпюры:

при $x_1 = 0$ получим $Q = 0$; $M = 0$;

при $x_1 = l$ получим $Q = -ql$; $M = -\dfrac{1}{2}ql^2$.

Для построения параболы определим изгибающий момент посередине: при $x = l/2$ получим $M = -\dfrac{1}{8}ql^2$.

Для более точного построения эпюры M можно рассчитать еще несколько точек параболы.

Проверим эпюры по правилам контроля. На всей длине балки действует равномерно распределенная нагрузка ($q = \text{const}$), поэтому

на эпюре Q — наклонная прямая, на эпюре M — парабола, выпуклостью направленная навстречу распределенной нагрузке. При $x = 0$ поперечная сила равна нулю ($Q = 0$), поэтому в этом сечении расположена вершина параболы. Поперечная сила отрицательная по всей длине балки, поэтому на эпюре момент убывает от 0 до $-\frac{1}{2}ql^2$. Скачки на эпюрах соответствуют сосредоточенным нагрузкам в заделке — реакции и моменту.

Задача 3. **Построить эпюры Q и M для балки на двух опорах длиной l, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 1.33).**

1. Если при построении эпюр Q и M в консольных балках определение реакций не обязательно, то для двухопорных балок невозможно построить эпюры, не определив предварительно реакции. Поэтому определяем реакции. Направляем их вверх навстречу действию нагрузки.

Если представить реакцию в опоре A в виде двух составляющих X_A и Y_A, то при отсутствии внешних нагрузок, действующих вдоль оси x, из уравнения равновесия $\sum F_x = 0$ следует, что горизонтальная составляющая реакции равна нулю.

Составим суммы моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = -ql\frac{l}{2} + Y_B l = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{1}{2}ql;$$

$$\sum M_B = ql\frac{l}{2} - Y_A l = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{1}{2}ql.$$

Проверим правильность определения реакции путем составления ранее не использованного уравнения равновесия:

$$\sum F_y = Y_A - ql + Y_B = \frac{1}{2}ql - ql + \frac{1}{2}ql = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Имеем один участок. Задаем произвольное сечение и его координату с началом координат в крайнем левом сечении. Пределы изменения координаты $0 \leqslant x_1 \leqslant l$.

3. Записываем уравнения для Q и M, рассматривая внешние нагрузки слева от сечения:

$$Q = Y_A - qx_1 = \frac{1}{2}ql - qx_1;$$

$$M = Y_A x_1 - qx_1\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}qlx_1 - \frac{1}{2}qx_1^2.$$

4. Строим эпюры. Предварительно определим значения Q и M в трех сечениях на краях и посередине:

при $x_1 = 0$ получим $Q = \frac{1}{2}ql$; $M = 0$;

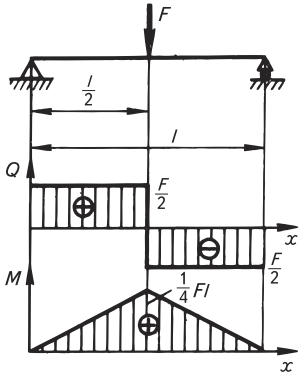


Рис. 1.34

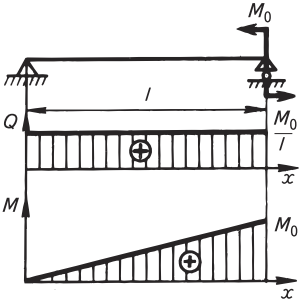


Рис. 1.35

при $x_1 = \dfrac{l}{2}$ получим $Q = 0$; $M = \dfrac{1}{8}ql^2$;

при $x_1 = l$ получим $Q = -\dfrac{1}{2}ql$; $M = 0$.

Проанализируем правильность эпюр с помощью правил контроля.

1. На весь пролет балки действует распределенная нагрузка q, откуда следует, что эпюра Q должна быть наклонной прямой, эпюра M — параболой, выпуклостью направленной навстречу q.

2. На участке, где $Q > 0$, изгибающий момент возрастает, и наоборот. В данном случае при $x_1 \leqslant l/2$ поперечная сила положительна, на этом участке изгибающий момент возрастает. При $x_1 > l/2$ поперечная сила отрицательна — изгибающий момент убывает.

3. В сечении, где $Q = 0$, на эпюре изгибающих моментов экстремум. На эпюре Q при $x_1 = l/2$ получим $Q = 0$, в этом же сечении на эпюре моментов — максимум.

Проанализируем наличие скачков на эпюрах. Согласно правилам, скачки на эпюре Q могут быть только в опорах за счет наличия опорных реакций и по величине должны быть равны реакциям. На эпюре M скачков не должно быть, так как среди активных и реактивных нагрузок нет сосредоточенных моментов.

Все эти правила подтверждают правильность построенных эпюр.

Задача 4. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.34), нагруженной посередине силой F.**

Задача 5. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.35), нагруженной сосредоточенным моментом M.**

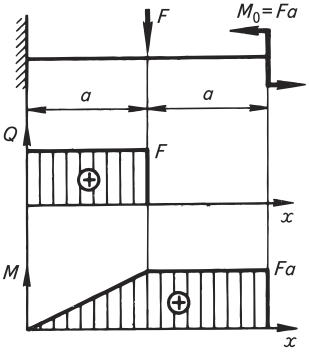


Рис. 1.36

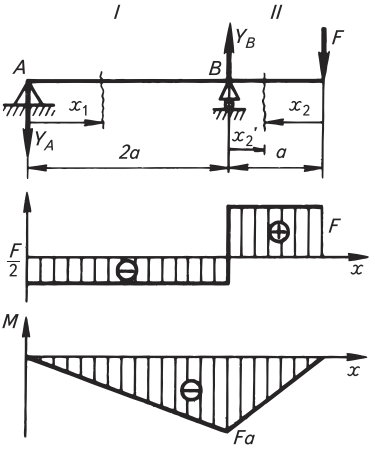


Рис. 1.37

Задача 6. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.36), если заданы F, $M_0 = Fa$.**

Задача 7. **Построить эпюры Q и M для балки на двух опорах с консолью (рис. 1.37), нагруженной сосредоточенной силой F.**

1. Определяем реакции, предварительно направляя их произвольно. Но в данной задаче можно определить направления реакций. В опоре B реакция будет направлена навстречу силе F. В опоре A балка под действием силы F стремится повернуться вокруг точки B. Опора A препятствует этому. Поэтому реакция в опоре A направлена вниз:

$$\sum M_A = Y_B \cdot 2a - F \cdot 3a = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{3}{2}F;$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot 2a - F \cdot a = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{1}{2}F.$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum F_y = -Y_A + Y_B - F = -\frac{1}{2}F + \frac{3}{2}F - F = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Имеем два участка. На I участке задаем координату произвольного сечения слева, а на II — справа. Такое задание вызвано тем, что в этом случае получаются наиболее простые уравнения для Q и M.

3. Записываем уравнения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $Q = -Y_A = -\frac{1}{2}F$; $M = -Y_A x_1 = -\frac{1}{2}Fx_1$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = F$; $M = -Fx_2$.

4. Строим эпюры.

Следует помнить, что можно начало координат задать слева или справа от сечения. При этом, составляя уравнения для Q и M, надо рассматривать внешние нагрузки соответственно слева и справа. Поэтому целесообразно выбрать начало координат так, чтобы уравнения для Q и M были наиболее простыми, т. е. чтобы в них входило меньшее число нагрузок. Так, например, на II участке можно задать координату произвольного сечения x_2' с началом координат слева от сечения (см. рис. 1.37). Уравнения для Q и M в этом случае примут такой вид:

II участок: $0 \leqslant x_2' \leqslant a$;

$$Q = -Y_A + Y_B = -\frac{1}{2}F + \frac{3}{2}F = F;$$

$$M = -Y_A(2a + x_2') + Y_B x_2' = -Fa + Fx_2'.$$

В общем случае уравнения получаются другими, но эпюры при этом не меняются.

Задача 8. **Построить эпюры Q и M для двухопорной балки, нагруженной распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q (рис. 1.38).**

1. Определяем реакции:

$$\sum M_A = -q \cdot 2a \cdot 3a + Y_B \cdot 3a = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{4}{3}qa;$$

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 3a + q \cdot 2a \cdot a = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{2}{3}qa.$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum F_y = Y_A - q \cdot 2a + Y_B = \frac{2}{3}qa - 2qa + \frac{4}{3}qa = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Определяем число участков и их границы. Имеем два участка: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$.

3. Записываем выражения для Q и M:

I участок:

$$Q = Y_A = \frac{2}{3}qa;$$

$$M = Y_A x_1 = \frac{2}{3}qax_1;$$

II участок:

$$Q = -Y_B + qx_2 = -\frac{4}{3}qa + qx_2;$$

$$M = Y_B x_2 - qx\frac{x_2}{2} = \frac{4}{3}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2.$$

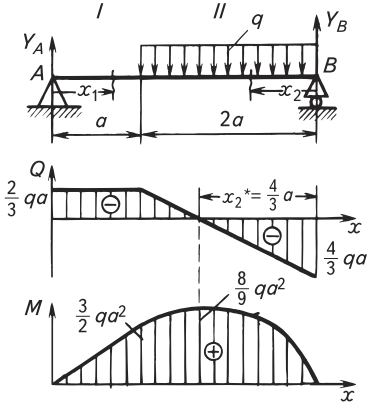


Рис. 1.38

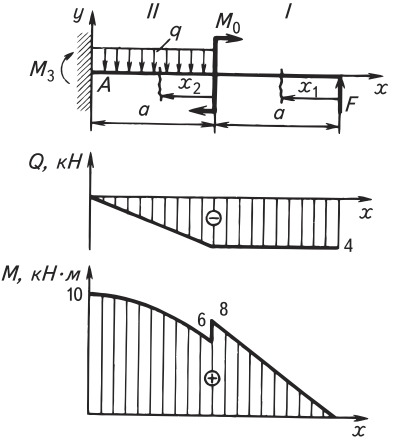


Рис. 1.39

4. Строим эпюры:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$;

при $x_1 = 0$ получим $Q = \dfrac{2}{3}qa$; $M = 0$;

при $x_1 = a$ получим $Q = \dfrac{2}{3}qa$; $M = \dfrac{2}{3}qa^2$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$;

при $x_2 = 0$ получим $Q = -\dfrac{4}{3}qa$; $M = 0$;

при $x_2 = 2a$ получим $Q = -\dfrac{4}{3}qa + q \cdot 2a = \dfrac{2}{3}qa$;

$$M = \frac{4}{3}qa \cdot 2a - \frac{1}{2}q(2a)^2 = \frac{2}{3}qa^2.$$

Так как $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$, то для определения экстремального значения изгибающего момента, очевидно, необходимо найти абсциссу x_2^*, при которой $Q = 0$, и подставить значение x_2^* в выражение для M:

$$Q = -\frac{4}{3}qa + qx_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{4}{3}a;$$

$$M_{\max} = M_{x_2 = \frac{4}{3}a} = \frac{4}{3}qa\frac{4}{3}a - \frac{1}{2}q\left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{8}{9}qa^2.$$

Проанализируем построенные эпюры. На I участке распределенной нагрузки нет $q = 0$; следовательно, эпюра Q представ-

ляет собой прямую, параллельную оси x, эпюра M — наклонную. На II участке действует распределенная нагрузка; следовательно, эпюра Q — наклонная прямая, эпюра M — парабола, направленная выпуклостью вверх — навстречу нагрузке. На участке, где $Q > 0$, эпюра M возрастает, где $Q < 0$ — убывает. В сечении, где $Q = 0$, эпюра M имеет максимум. Эпюра Q претерпевает скачки только в сечениях, где приложены сосредоточенные силы — реакции. Так как в нагрузке балки сосредоточенных моментов нет, то и на эпюре M нет скачков. В сечении, где начинается распределенная нагрузка, на эпюре Q скачкообразное изменение угла наклона (параллельная прямая стыкуется с наклонной), на эпюре M — плавное сопряжение прямой с параболой. Эпюры свидетельствуют, что все эти правила выполняются.

Задача 9. **Построить эпюры Q и M для консольной балки (рис. 1.39) при $a = 2$ м, $F = 4$ кН, $M_0 = 2$ кН·м, $q = 2$ кН/м.**

1. Определяем реакции заделки (для контроля эпюр):

$$\sum F_y = F - qa + Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = qa - F = 2 \cdot 2 - 4 = 0;$$

$$\sum M_A = F \cdot 2a - M_0 - qa\frac{a}{2} - M_з = 0,$$

откуда $M_з = 2Fa - M_0 - \frac{1}{2}qa^2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 10$ кН·м.

2. Имеем два участка. Начало координат задаем справа от сечения. Тогда в уравнения для Q и M не войдут реакции заделки.

3. Записываем уравнения для Q и M, рассматривая внешние нагрузки справа от сечения:

I участок: $0 \leqslant x_1 < a$; $Q = -F$; $M = Fx_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = -F + qx_2$; $M = F(a + x_2) - M_0 - \frac{1}{2}qx_2^2$.

4. Строим эпюры:

I участок:

при $x_1 = 0$ получим $Q = -F = -4$ кН; $M = 0$;

при $x_1 = a = 2$ м получим $Q = -F = -4$ кН;

$M = Fa = 4 \cdot 2 = 8$ кН·м;

II участок:

при $x_2 = 0$ получим $Q = -F = -4$ кН;

$M = Fa - M_0 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$ кН·м;

при $x_2 = a$ получим $Q = -F + qa = -4 + 2 \cdot 2 = 0$;

$$M = F2a - M_0 - \frac{1}{2}qa^2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проанализируем полученные эпюры. На I участке $q = 0$, поэтому на эпюре Q — параллельная прямая, на эпюре M — наклонная. На II участке $q = \text{const}$, поэтому на эпюре Q — наклонная прямая, на эпюре M — парабола, направленная выпуклостью вверх навстречу

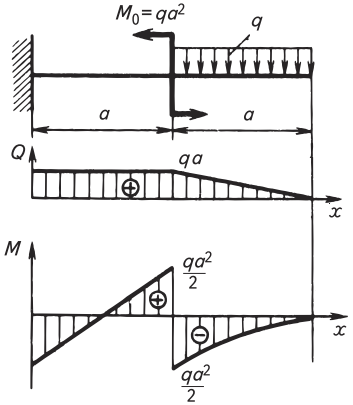


Рис. 1.40

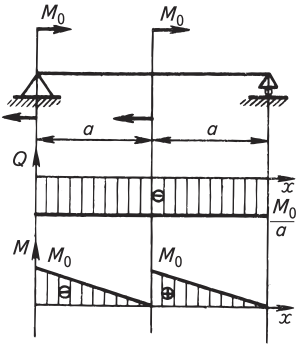


Рис. 1.41

нагрузке. На всей длине балки $Q < 0$, поэтому изгибающий момент убывает по всей длине. Единственный скачок на эпюре Q определяется действием в этом сечении внешней сосредоточенной силы F. В заделке скачка нет, так как реакция равна нулю. На эпюре M два скачка. Скачок в заделке определяется моментом в заделке, скачок на границе участков — внешним сосредоточенным моментом. В сечении, где $Q = 0$ (а это сечение — заделка), на эпюре M — максимум, т. е. на эпюре M в заделке — вершина параболы.

Задача 10. **Для балки на рис. 1.40 построить эпюры Q и M, если заданы a, q, $M_0 = qa^2$.**

Задача 11. **Для балки на рис. 1.41 построить эпюры Q и M, если заданы a и M_0.**

Задача 12. **Для балки на рис. 1.42 построить эпюры Q и M, если заданы a, q.**

Задача 13. **Для двухопорной балки на рис. 1.43 построить эпюры Q и M, если заданы a, q, $M_0 = qa^2$.**

1. Определяем реакции, направив их вверх:

$$\sum M_A = M_0 - q \cdot 4a \cdot 2a + Y_B \cdot 5a = 0,$$

откуда $Y_B = \dfrac{7}{5}qa$;

$$\sum M_B = M_0 - Y_A \cdot 5a + q \cdot 4a \cdot 3a = 0,$$

откуда $Y_A = \dfrac{1}{5a}(qa^2 + 12qa^2) = \dfrac{13}{5}qa.$

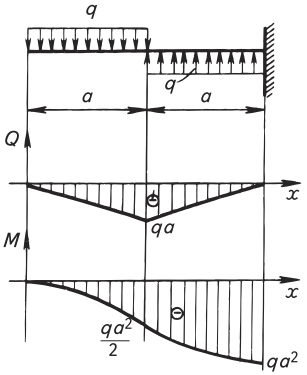


Рис. 1.42

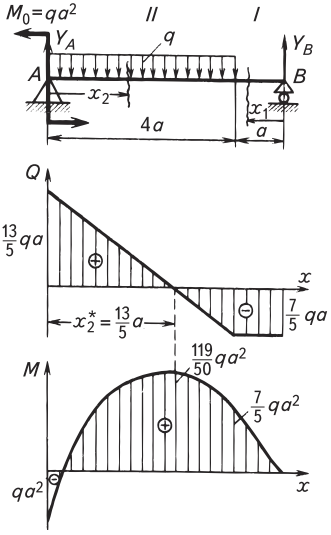


Рис. 1.43

Проверка:

$$\sum F_y = Y_A - q4a + Y_B = \frac{13}{5}qa - 4qa + \frac{7}{5}qa = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Имеем два участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты сечений.

3. Записываем уравнения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 < a$; $Q = -Y_B = -\frac{7}{5}qa$; $M = Y_B x_1 = \frac{7}{5}qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 < 4a$; $Q = Y_A - qx_2 = \frac{13}{5}qa - qx_2$;

$$M = -M_0 + Y_A x_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 = -qa^2 + \frac{13}{5}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2.$$

4. Строим эпюры:

I участок: при $x_1 = 0$ получим $Q = -\frac{7}{5}qa$; $M = 0$;

при $x_1 = a$ получим $Q = -\frac{7}{5}qa$; $M = \frac{7}{5}qa^2$;

II участок: при $x_2 = 0$ получим $Q = \frac{13}{5}qa$; $M = -qa^2$;

при $x_2 = 4a$ получим $Q = \frac{13}{5}qa - 4qa = -\frac{7}{5}qa$;

$$M = -qa^2 + \frac{13}{5}qa \cdot 4a - \frac{1}{2}q(4a)^2 = \frac{7}{5}qa^2.$$

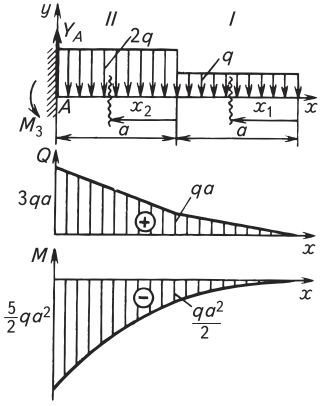


Рис. 1.44

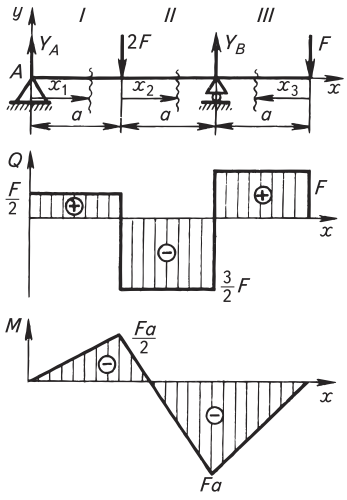


Рис. 1.45

Определяем абсциссу x_2^*, при которой $Q = 0$, а изгибающий момент имеет экстремальное значение:

$$Q = \frac{13}{5}qa - qx_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{13}{5}a;$$

$$M_{\max} = M_{x_2=\frac{13}{5}a} = -qa^2 + \frac{13}{5}qa\frac{13}{5}a - \frac{1}{2}q\left(\frac{13}{5}a\right)^2 = \frac{119}{50}qa^2.$$

Задача 14. **Построить эпюры Q и M для консольной балки (рис. 1.44), нагруженной распределенной нагрузкой, если заданы a и q.**

1. Для контроля эпюр определяем реакции в заделке:

$$\sum F_y = Y_A - 2qa - qa = 0 \Rightarrow Y_A = 3qa;$$

$$\sum M_A = M_з - 2qa\frac{a}{2} - qa\frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow M_з = \frac{5}{2}qa^2.$$

2. Имеем два участка, проводим произвольные сечения, задаем их координаты.

3. Записываем уравнения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $Q = qx_1$; $M = -\frac{1}{2}qx_1^2$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = qa + 2qx_2$;

$$M = -qa\left(\frac{a}{2} + x_2\right) - \frac{2qx_2^2}{2} = -\frac{1}{2}qa^2 - qax_2 - qx_2^2.$$

4. Строим эпюры:

$$\begin{aligned} &I\ участок: && \text{при } x_1 = 0 \text{ получим } Q = 0;\ M = 0;\\ &&& \text{при } x_2 = a \text{ получим } Q = qa;\ M = -\frac{1}{2}qa^2;\\ &II\ участок: && \text{при } x_2 = 0 \text{ получим } Q = qa;\ M = -\frac{1}{2}qa^2;\\ &&& \text{при } x_2 = a \text{ получим } Q = 3qa;\\ &&& M = -\frac{1}{2}qa^2 - qa^2 - qa^2 = -\frac{5}{2}qa^2. \end{aligned}$$

Задача 15. **Построить эпюры Q и M для балки на двух опорах (рис. 1.45), нагруженной сосредоточенными силами, если заданы a, F.**

1. Определяем реакции:

$$\sum M_A = -2Fa + Y_B \cdot 2a - F \cdot 3a = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{5}{2}F;$$

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 2a + 2F \cdot a - Fa = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{1}{2}F.$$

Проверка:

$$\sum F_y = Y_A - 2F + Y_B - F = \frac{1}{2}F - 2F + \frac{5}{2}F - F = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Имеем три участка, задаем сечения и их координаты.

3. Записываем уравнения для Q и M:

$$I\ участок:\ 0 \leqslant x_1 \leqslant a;\ Q = Y_A = -\frac{1}{2}F;\ M = Y_A x_1 = \frac{1}{2}Fx_1;$$

$$II\ участок:\ 0 \leqslant x_2 \leqslant a;\ Q = Y_A - 2F = \frac{1}{2}F - 2F = -\frac{3}{2}F;$$

$$M = Y_A(a + x_2) - 2Fx_2 = \frac{1}{2}Fa - \frac{3}{2}Fx_2;$$

$$III\ участок:\ 0 \leqslant x_3 \leqslant a;\ Q = F;\ M = -Fx_2.$$

4. Строим эпюры.

Задача 16. **Для балки (рис. 1.46) построить эпюры Q и M, если заданы q, $M_0 = \frac{1}{2}qa^2$, a.**

Задача 17. **Для балки (рис. 1.47) построить эпюры Q и M, если заданы a, q, $F = qa$.**

Задача 18. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.48), если заданы $a = 2$ м, $q = 2$ кН/м.**

1. Определяем реакции. Направляем реакции опор вверх, т. е. навстречу внешней нагрузке:

$$\sum M_A = -q \cdot 3a\frac{3}{2}a + Y_B \cdot 2a = 0,$$

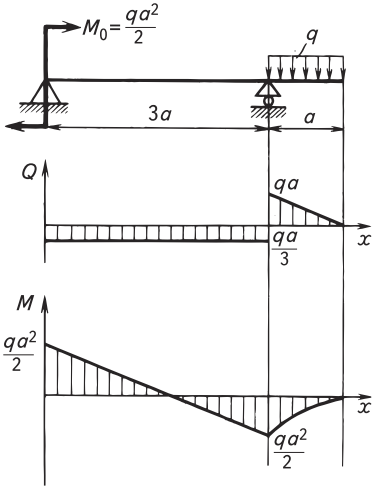


Рис. 1.46

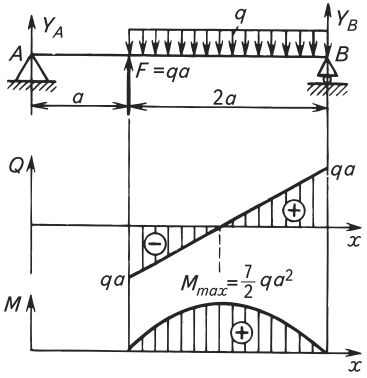


Рис. 1.47

откуда $Y_B = \dfrac{9}{4}qa = \dfrac{9}{4}\cdot 2\cdot 2 = 9$ кН;

$$\sum M_B = -Y_A\cdot 2a + q\cdot 3a\frac{a}{2} = 0,$$

откуда $Y_A = \dfrac{3}{4}qa = \dfrac{3}{4}\cdot 2\cdot 2 = 3$ кН.

Проверка правильности определения реакций. Составим ранее не использованное уравнение равновесия:

$$\sum F_y = Y_A - q\cdot 3a + Y_B = \frac{3}{4}qa - 3qa + \frac{9}{4}qa = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Имеем два участка. Проводим произвольные сечения и задаем их координаты: на I участке будем рассматривать внешние нагрузки слева от сечения, на II участке — справа.

3. Записываем уравнения для Q и M:

I участок: $0 < x_1 < 2a$; $Q = Y_A - qx_1 = \dfrac{3}{4}qa - qx_1$;

$$M = Y_A x_1 - qx_1\frac{x_1}{2} = \frac{3}{4}qax_1 - \frac{1}{2}qx_1^2;$$

II участок: $0 < x_1 < a$; $Q = qx_2$; $M = -\dfrac{1}{2}qx_2^2$.

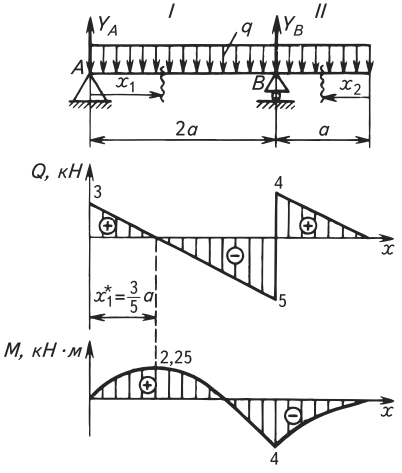


Рис. 1.48

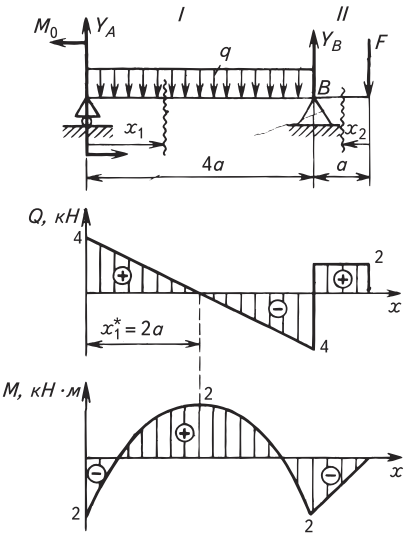


Рис. 1.49

4. Строим эпюры:

I участок: определяем максимум момента $M_{\max}$. Определяем координату сечения, в котором поперечная сила $Q = 0$:

$$Q = \frac{3}{4}qa - qx_1^* = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{3}{4}a = \frac{3}{2} \text{ м}.$$

Подставляем найденное значение x_1^* в выражение для момента:

$$M_{\max} = M_{x_1=\frac{3}{4}a} = \frac{3}{4}qa\frac{3}{4}a - \frac{q}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{9}{32}qa^2 = \frac{9}{32}\cdot 2\cdot 2^2 = 2{,}25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

II участок: при $x_2 = a = 2$ м получаем $Q = qa = 2\cdot 2 = 4$ кН;

$$M = -\frac{1}{2}qa^2 = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^2 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Задача 19. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.49), если заданы $q = 2$ кН/м, $a = 1$ м, $F = qa = 2$ кН, $M_0 = qa^2 = 2$ кН·м.**

1. Определяем реакции. Предварительно направляем их вверх. Составляем уравнения моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = M_0 - q\cdot 4a\cdot 2a + Y_B\cdot 4a - F\cdot 5a = 0,$$

или $qa^2 - 8qa^2 + 4Y_A a - 5qa^2 = 0,$

откуда $Y_B = 3qa = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ кН;

$$\sum M_B = M_0 - Y_A \cdot 4a + q \cdot 4a \cdot 2a - Fa = 0,$$

или $qa^2 - 4Y_A a + 8qa^2 - qa^2 = 0$,
откуда $Y_A = 2qa = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ кН.

Проверка правильности определения реакций. Составим сумму проекций всех сил на ось y:

$$\sum F_y = Y_A - q \cdot 4a + Y_B - F = 2qa - 4qa + 3qa - qa = 0,$$

откуда $0 = 0$.

2. Имеем два участка. Задаем произвольные сечения и их координаты.

3. Записываем уравнения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 4a$; $Q = Y_A - qx_1 = 2qa - qx_1$;

$$M = -M_0 + Y_A x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2 = -qa^2 + 2qax_1 - \frac{1}{2} q x_1^2;$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = F = qa = 2$ кН; $M = -Fx_2 = -qax_2$.

4. Строим эпюры. На I участке определим максимум изгибающего момента. Из условия $Q = 0$ определяем x_1^*:

$$Q = 2qa - qx_1^* = 0 \Rightarrow x_1^* = 2a = 2 \text{ м}.$$

Подставляем x_1^* в уравнение момента:

$$M_{\max} = M_{x_1=2a} = -qa^2 + 2qa \cdot 2a - \frac{1}{2} q(2a)^2 = qa^2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Задача 20. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.50), если заданы $a = 1$ м, $b = 0{,}8$ м, $c = 1{,}2$ м, $q = 20$ кН/м, $F = 14$ кН, $M_0 = 7$ кН $\cdot$ м.**

1. Определяем реакции опор. Произвольно направляем Y_A и Y_B вверх и составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_A = -\frac{1}{2} qa^2 + Fa + Y_B(a+b) - qc\left(a + b + \frac{c}{2}\right) + M_0 = 0;$$

$$\sum M_B = -Y_A(a+b) + qa\left(\frac{a}{2} + b\right) - Fb - \frac{1}{2} qa^2 + M_0 = 0.$$

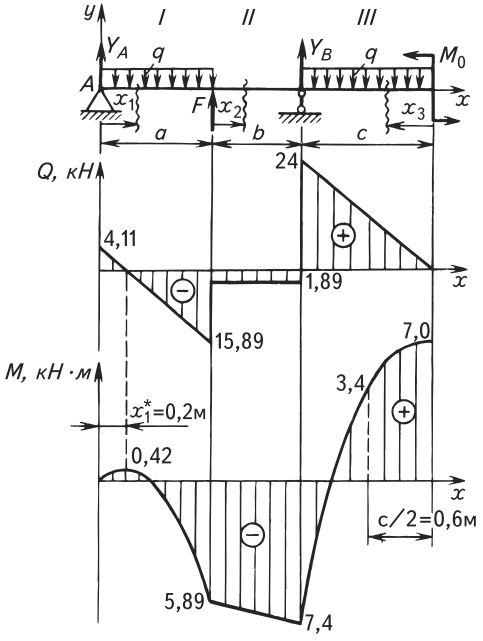


Рис. 1.50

Решая эти уравнения, получим

$$Y_B = \frac{\frac{1}{2}qa^2 - Fa + qc\left(a+b+\frac{c}{2}\right) - M_0}{a+b} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 1 - 14\cdot 1 + 20\cdot 1{,}2\left(1+0{,}8+\frac{1{,}2}{2}\right) - 7}{1+0{,}8} = 25{,}89 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{qa\left(\frac{a}{2}+b\right) - Fb - \frac{qc^2}{2} + M_0}{a+b} =$$

$$= \frac{20\cdot 1\left(\frac{1}{2}+0{,}8\right) - 14\cdot 0{,}8 - \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 1{,}2^2 + 7}{1+0{,}8} = 4{,}11 \text{ кН}.$$

Положительные знаки указывают, что выбранное направление реакций верное. Для проверки правильности определения реакций

опор составим новое уравнение равновесия — суму проекций сил на ось y:

$$\sum F_y = Y_A - qa + F + Y_B - qc =$$
$$= 4,11 - 20 \cdot 1 + 14 + 25,89 - 20 \cdot 1,2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Реакции найдены правильно.

2. Разбиваем балку на три участка. На каждом участке проводим произвольное сечение и задаем координату этого сечения. На I и II участках начало координат помещаем в крайних левых точках участков. Это означает, что при определении внутренних усилий мы будем рассматривать нагрузки, лежащие слева от сечения. На III участке начало координат помещаем в крайнюю правую точку участка; следовательно, здесь мы будем рассматривать нагрузки справа от сечения.

3. Составляем уравнения для поперечной силы Q по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $Q = Y_A - qx_1$;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $Q = Y_A - qa + F$;
III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant c$; $Q = qx_3$.

4. Строим эпюру Q. На I и III участках Q — линейная функция, так как в уравнение x входит в первой степени. Поэтому определяем значения Q в начале и конце данных участков и полученные точки соединяем прямой. На II участке значение Q постоянно; следовательно, эпюра Q на II участке — горизонтальная прямая.

I участок: $x_1 = 0$; $Q = Y_A = 4,11$ кН;
$x_1 = a$; $Q = Y_A - qa = 4,11 - 20 \cdot 1 = -15,89$ кН;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $Q = Y_A - qa + F = 4,11 - 20 \cdot 1 + 14 = -1,89$ кН;
III участок: $x_3 = 0$; $Q = 0$,
$x_3 = c$; $Q = qc = 20 \cdot 1,2 = 24$ кН.

Скачки на эпюре Q — в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы.

5. Составляем уравнения для изгибающего момента M по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = Y_A x_1 - \dfrac{1}{2} q x_1^2$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $M = Y_A(a + x_2) - qa\left(\dfrac{1}{2}a + x_2\right) + Fx_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant c$; $M = M_0 - \dfrac{1}{2} q x_3^2$.

6. Строим эпюру M.

На II участке M — линейная функция, так как x входит в уравнение в первой степени, поэтому определяем значения M в начале и конце данного участка и полученные точки соединяем прямой. На I и III участках эпюра M — парабола, так как x входит

в уравнения во второй степени, поэтому двух точек (в начале и конце участков) недостаточно. Следует отметить, что на участках, где эпюра M параболическая, необходимо убедиться в наличии или отсутствии экстремумов. Если эпюра Q не пересекает ось x, то на эпюре M экстремумов нет. Если на каком-либо участке есть сечение с координатой x^*, где $Q=0$, то в этом сечении будет максимум либо минимум M.

На I участке эпюра Q пересекает ось x внутри участка. Найдем координату сечения x_1^*, в котором $Q=0$:

$$Q = Y_A - qx_1^* = 0,$$

откуда $x_1^* = Y_A/q = 4,11/20 = 0,2055$ м.

Подставив x_1^* в уравнение для M, получим

$$M_{\max} = M_{x_1=0,2055} = 4,11 \cdot 0,2055 - \frac{1}{2}20 \cdot 0,2055^2 = 0,422 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Найдем значения M в крайних точках I и II участков:

I участок: $x_1 = 0;\ M = 0;$

$x_1 = a;\ M = Y_A a - \dfrac{1}{2}qa^2 = 4 \cdot 11 \cdot 1 - \dfrac{1}{2}20 \cdot 1^2 = -5,89$ кН $\cdot$ м;

II участок: $x_2 = 0;\ M = Y_A a - \dfrac{1}{2}qa^2 = -5,89$ кН $\cdot$ м;

$x_2 = b;\ M = Y_A(a+b) - qa\left(\dfrac{a}{2}+b\right) + Fb = 4,11 \cdot 1,8 - 20 \cdot 1\left(\dfrac{1}{2}+0,8\right) + 14 \cdot 0,8 = -7,4$ кН $\cdot$ м.

На III участке $Q=0$ в крайнем правом сечении участка; следовательно, здесь эпюра достигает экстремума:

III участок: $x_3 = 0;\ M = M_0 = 7$ кН $\cdot$ м;

$x_3 = c;\ M = M_0 - \dfrac{1}{2}qc^2 = 7 - \dfrac{1}{2}20 \cdot 1,2^2 = -7,4$ кН $\cdot$ м;

$x_3 = \dfrac{1}{2}c;\ M = M_0 - \dfrac{1}{2}q\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = 7 - \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(\dfrac{1,2}{2}\right)^2 = 3,4$ кН $\cdot$ м.

Задача 21. **Построить эпюры Q и M для балки (рис. 1.51), если заданы a, q, $F = qa$, $M_0 = qa^2$.**

1. Определяем реакции. Предварительно направляем их вверх — произвольно.

$$\sum M_A = Fa - M_0 - qa\left(\frac{a}{2}+a\right) + Y_A 2a = 0,$$

или $qa^2 - qa^2 + \dfrac{3}{2}qa^2 + Y_B 2a = 0,$

откуда $Y_B = \dfrac{3}{4}qa;$

$$\sum M_B = F \cdot 3a - Y_A \cdot 2a - M_0 - qa\frac{a}{2} = 0,$$

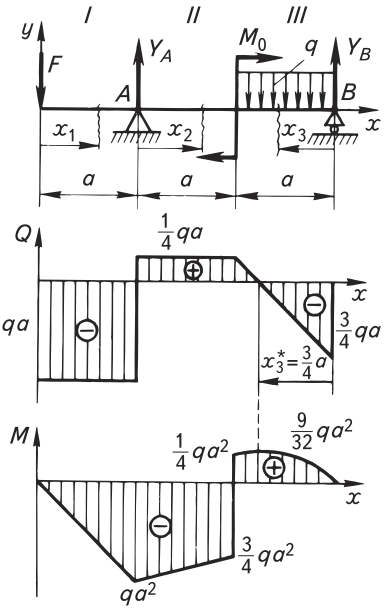


Рис. 1.51

или $3qa^2 + Y_A \cdot 2a - qa^2 + \frac{1}{2}qa^2 = 0,$

откуда $Y_A = \frac{5}{4}qa.$

Решение со знаком плюс говорит о правильности выбора направления реакций.

Проверка:

$$\sum F_y = -F + Y_A - qa + Y_B = -qa + \frac{5}{4}qa - qa + \frac{3}{4}qa = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

2. Разбиваем балку на три участка, проводим произвольные сечения, задаем их координаты.

3. Составляем выражения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $Q = -F = -qa$; $M = -Fx_1 = -qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = -F + Y_A = -qa + \frac{5}{4}qa = \frac{1}{4}qa$;

$$M = -F(a + x_2) + Y_A x_2 = -qa(a + x_2) + \frac{5}{4}qax_2 = -qa^2 + \frac{1}{4}qax_2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $Q = -Y_B + qx_3 = -\frac{3}{4}qa + qx_3$;

$$M = Y_B x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = \frac{3}{4}qax_3 - \frac{1}{2}qx_3^2.$$

4. Строим эпюры Q и M.

I участок: при $x_1 = 0$ получаем $Q = -qa$; $M = 0$;

при $x_1 = a$ получаем $Q = -qa$; $M = -qa^2$;

II участок: при $x_2 = 0$ получаем $Q = \dfrac{1}{4}qa$; $M = -qa^2$;

при $x_2 = a$ получаем $Q = \dfrac{1}{4}qa$; $M = -qa^2 + \dfrac{1}{4}qa^2 = -\dfrac{3}{4}qa^2$;

III участок: при $x_3 = 0$ получаем $Q = -\dfrac{3}{4}qa$; $M = 0$;

при $x_3 = a$ получаем $Q = -\dfrac{3}{4}qa + qa = \dfrac{1}{4}qa$;

$$M = \frac{3}{4}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{4}qa^2.$$

Определяем максимальный момент на III участке. При $x_3 = x_3^*$ поперечная сила $Q = 0$; следовательно, в этом сечении момент принимает максимальное значение. Найдем x_3^*:

$$Q = -\frac{3}{4}qa + qx_3^* = 0 \Rightarrow x_3^* = \frac{3}{4}a.$$

Тогда

$$M_{\max} = M_{x_3=\frac{3}{4}a} = \frac{3}{4}qa\left(\frac{3}{4}a\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{9}{32}qa^2.$$

Задача 22. **Для балки (рис. 1.52) построить эпюры Q и M, если заданы $a = 2$ м, $q = 200$ Н/м, $F = qa = 400$ Н, $M_0 = 4qa^2 = 3200$ Н $\cdot$ м.**

Задача 23. **Для заданной схемы закрепления балки (рис. 1.53) восстановить нагрузку балки, вызывающую изменение изгибающих моментов, согласно заданной эпюре.**

Эта задача предполагает обратные действия — по эпюре определить нагрузку.

Для решения воспользуемся дифференциальными зависимостями. По эпюре моментов видим, что балка имеет два участка I и II. Зададим произвольные сечения на этих участках и определим уравнения для моментов на каждом из участков; затем, используя зависимость $Q = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$ (плюс — для правосторонней, минус — для левосторонней координатной системы), получим уравнения для поперечной силы:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = M_0 - \dfrac{M_0}{a}x_1$, откуда $Q = -\dfrac{M_0}{a}$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = M_0 - \dfrac{M_0}{a}x_2$, откуда $Q = \dfrac{M_0}{a}$.

Строим эпюру поперечных сил.

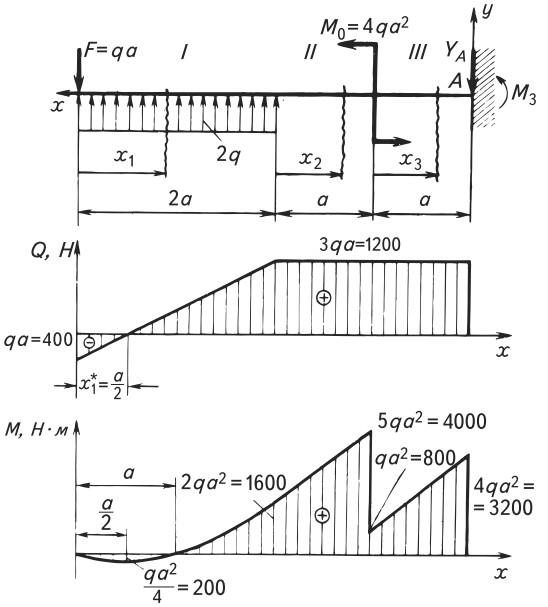


Рис. 1.52

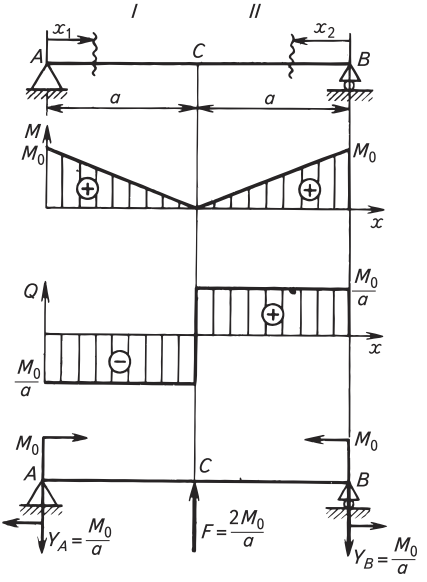


Рис. 1.53

Используя другую зависимость $q = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}$, приходим к выводу, что на балку не действуют распределенные нагрузки, так как $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = 0$.

Анализируя эпюры с помощью правил контроля правильности построения эпюр, приходим к таким заключениям.

1. В сечениях A и B должны действовать сосредоточенные моменты M_0, так как на эпюре M имеются скачки на величину M_0. Это же следует из анализа уравнений для моментов по участкам. Нанесем эти моменты на схему балки.

2. В сечениях A и B должны действовать сосредоточенные силы — реакции опор, равные M_0/a и направленные вниз в соответствии с правилом знаков для Q.

В сечении C должна действовать сосредоточенная сила, равная $2M_0/a$, направленная вверх. Нанесем эти сосредоточенные силы на схему балки.

О наличии этих сил свидетельствуют скачки Q в этих сечениях и их направления. Так, например, в сечении C скачок поперечной силы — от $-M_0/a$ до M_0/a, т. е. в сторону положительных значений; следовательно, сила направлена вверх.

Для проверки составляем уравнение равновесия — сумма моментов относительно любой точки (в данном случае возьмем точку A) должна быть равна нулю:

$$\sum M_A = M_0 - \frac{M_0}{a}2a + \frac{2M_0}{a}a - M_0 = 0,$$

откуда получим тождество $0 \equiv 0$.

Это свидетельствует о правильном решении. Другой проверкой является составление уравнений для Q и M по участкам для балки с воспроизведенной нагрузкой. При составлении убеждаемся в том, что они совпадают с ранее записанными.

1.4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ, ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ РАМ

Рама — система жестко соединенных между собой стержней. Определения продольной силы N, поперечной силы Q и изгибающего момента M в произвольном сечении рамы такие же, как и для прямого бруса (см. § 1.1 и 1.3).

Правило знаков (рис. 1.54). При обходе контура рамы по часовой стрелке считаются положительными поперечная сила, направленная наружу от контура, и изгибающий момент, действующий по часовой стрелке.

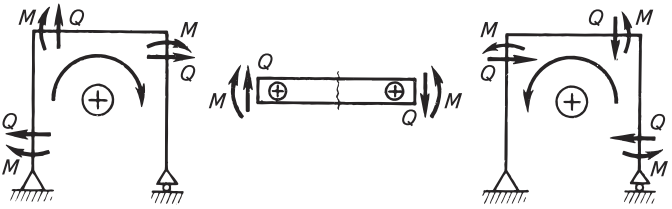


Рис. 1.54

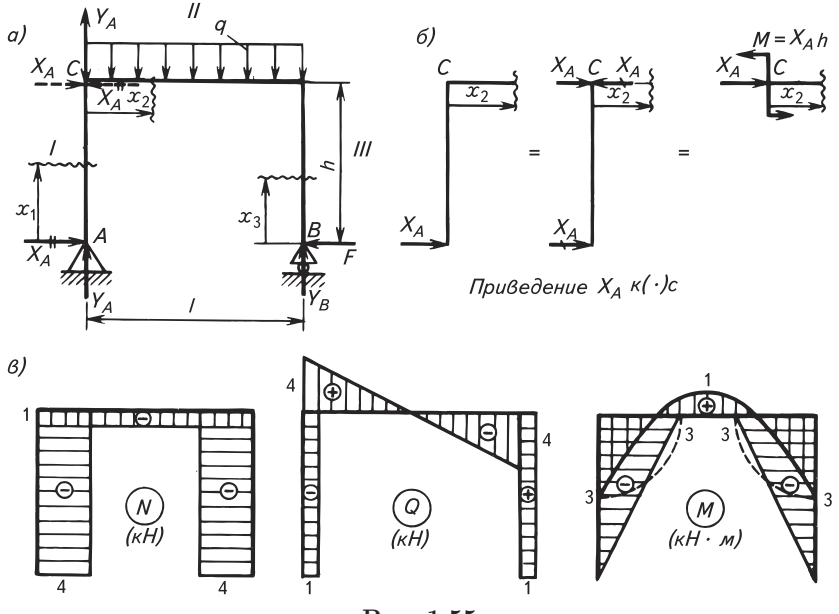


Рис. 1.55

При обходе контура рамы против часовой стрелки считаются положительными поперечная сила, направленная внутрь контура, и изгибающий момент, действующий против часовой стрелки.

Таким образом, направление положительного изгибающего момента всегда совпадает с направлением обхода контура рамы.

Как и раньше, продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной при сжатии.

Задача 1. **Построить эпюры** N, Q **и** M **для рамы (рис. 1.55, *а*), если заданы** $F = 1$ кН, $q = 2$ кН/м, $h = 3$ м, $l = 4$ м.

1. Определяем реакции из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = X_A - F = 0 \Rightarrow X_A = F;$$

$$\sum M_A = -ql\frac{l}{2} + Y_B l = 0 \Rightarrow Y_B = q\frac{l}{2} = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -Y_A l + ql\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow Y_A = q\frac{l}{2} = 4 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = Y_A + Y_B - ql = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

2. Выделяем в раме три участка (рис. 1.55, *а*), задаем произвольные сечения на участках и координаты этих сечений. На II участке можно было бы задать координату сечения и справа. При этом, составляя уравнения для N, Q и M, необходимо было бы учитывать силу F и реакцию Y_B, т. е. также две нагрузки, как и при задании координаты слева.

При задании координаты сечения на III участке предпочтительно при составлении уравнений для N, Q и M рассматривать внешние нагрузки вниз от сечения. Если задать координату сечения иначе, то придется рассматривать все внешние нагрузки, действующие на II и I участках, что значительно сложнее. Но при правильном решении эпюры должны получиться одинаковыми.

Построение эпюры при рассмотрении внешних нагрузок по одну, а затем по другую сторону от сечения является одним из способов проверки правильности решения. Если эпюры совпадают, то это говорит о правильности решения.

3. Записываем уравнения для N (кН), Q (кН), M (кН $\cdot$ м):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant h$; $N = -Y_A = -4$; $Q = -X_A = -1$;
$M = -X_A x_1 = -x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant l$; $N = -X_A = -1$; $Q = Y_A - qx_2 = 4 - 2x_2$;
$M = -X_A h + Y_A x_2 - \frac{1}{2} q x_2^2 = -3 + 4x_2 - x_2^2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant h$; $N = -Y_A = -4$; $Q = F = 1$;
$M = -F x_3 = -x_3$.

Замечание: при переходе ко II участку рамы все внешние нагрузки приведены к начальному сечению участка, а именно: сила X_A приведена к точке C (с добавлением пары сил с моментом $X_A h$), а сила Y_A перенесена по линии ее действия также в точку C (рис. 1.55, *б*).

4. Строим эпюры (рис. 1.55, *в*). Следует отметить, что в рамах на каждом участке справедливы дифференциальные зависимости между q, Q и M: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$ и $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = q$, а следовательно, и правила контроля правильности построения эпюр Q и M. Так, например, на I и III участках нет распределенной нагрузки, значит на эпюре Q —

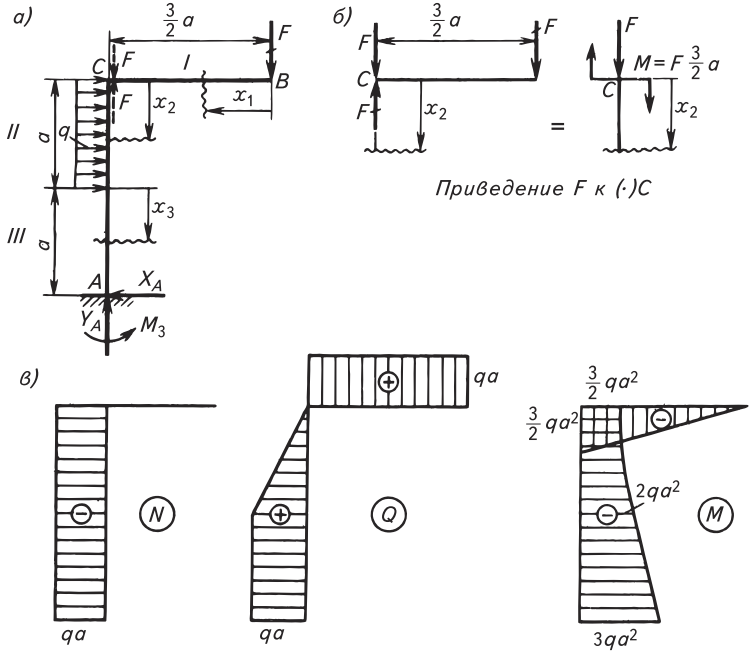


Рис. 1.56

параллельные прямые, а на эпюре M — наклонные. На участке II — горизонтальном — действуют все зависимости, используемые для балок. Так, если на участок действует распределенная нагрузка, то эпюра Q — наклонная прямая, эпюра M — парабола, выпуклостью направленная навстречу нагрузке, причем в сечении, где $Q = 0$, т. е. при $x_1 = l/2$, на эпюре M — максимум.

Задача 2. **Построить эпюры N, Q и M для рамы с заделкой (рис. 1.56, *а*), если заданы a, q, $F = qa$.**

1. Для контроля эпюр определяем реакции в заделке:

$$\sum F_x = -X_A + qa = 0 \Rightarrow X_A = qa;$$

$$\sum F_y = Y_A - F = 0 \Rightarrow Y_A = F = qa;$$

$$\sum M_A = -F\frac{3}{2}a - qa\frac{3}{2}a + M_з = 0 \Rightarrow M_з = 3qa^2.$$

Проверка:

$$\sum M_B = M_з - X_A 2a - Y_A\frac{3}{2}a + qa\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

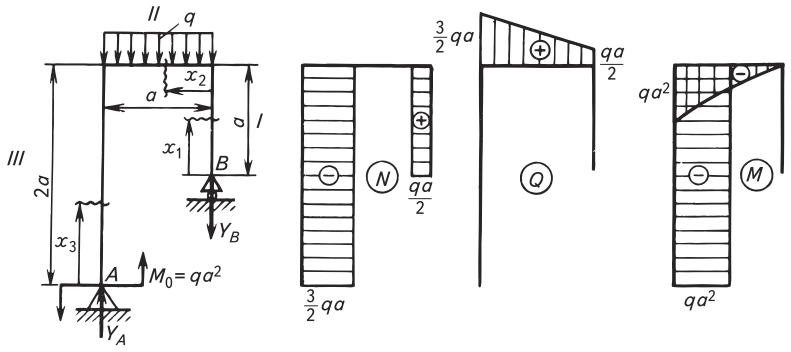


Рис. 1.57

2. Выделяем в раме три участка, проводим произвольные сечения, задаем их координаты так, чтобы при определении внутренних усилий рассматривать внешние нагрузки от свободного конца рамы до сечения.

Записываем уравнения для N, Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{3}{2}a$; $N = 0$; $Q = F = qa$; $M = -Fx_1 = -qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -F = -qa$; $Q = qx_2$;

$$M = -F\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}qx_2^2 = -\frac{3}{2}qa^2 - \frac{1}{2}qx_2^2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = -F = -qa$; $Q = qa$;

$$M = -F\frac{3}{2}a - qa\left(\frac{a}{2} + x_3\right) = 2qa^2 - qax_3.$$

Замечание: как и в предыдущей задаче, при переходе ко II участку рамы сила F приведена к точке C (с добавлением пары сил с моментом $F\dfrac{3}{2}a$) (рис. 1.56, *б*).

4. Строим эпюры (рис. 1.56, *в*).

Задача 3. **Построить эпюры N, Q и M для рамы (рис. 1.57), если заданы a, q, $M_0 = qa^2$.**

1. Определяем реакции:

$$\sum F_x = X_A = 0;$$

$$\sum M_A = M_0 - qa\frac{a}{2} - Y_B a = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{1}{2}qa;$$

$$\sum M_B = M_0 - Y_A a + qa\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{3}{2}qa.$$

2. Выделяем в раме три участка.

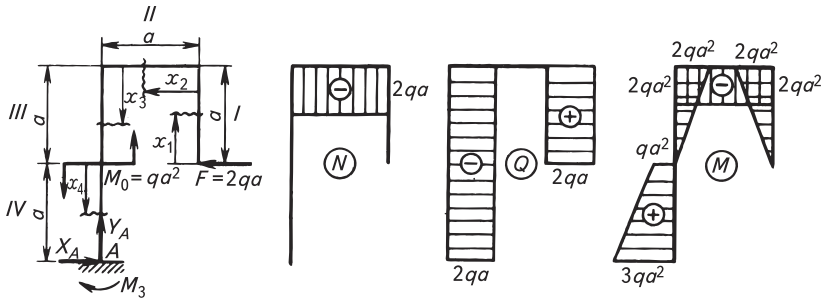


Рис. 1.58

3. Записываем уравнения для N, Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = Y_B = \dfrac{1}{2}qa$; $Q = 0$; $M = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = 0$; $Q = Y_B + qx_2 = \dfrac{1}{2}qa + qx_2$;

$$M = -Y_B x_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 = -\frac{1}{2}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 2a$; $N = -Y_A = -\dfrac{3}{2}qa$; $Q = 0$;

$$M = -M_0 = -qa^2.$$

4. Строим эпюры.

Задача 4. **Построить эпюры N, Q и M для рамы (рис. 1.58), если заданы a, q, $F = 2qa$, $M_0 = qa^2$.**

1. Определяем реакции в заделке (для контроля эпюр):

$$\sum F_x = X_A - F = 0 \Rightarrow X_A = F = 2qa;$$

$$\sum F_y = Y_A = 0;$$

$$\sum M_A = M_0 + Fa - M_з = 0 \Rightarrow M_з = 3qa^2.$$

2. Выделяем в раме четыре участка.

3. Записываем уравнения для N, Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = 0$;
$Q = F = 2qa$; $M = -Fx_1 = -2qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -F = -2qa$;
$Q = 0$; $M = -Fa = -2qa^2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = 0$;
$Q = -F = -2qa$; $M = -Fa + Fx_3 = -2qa^2 + 2qax_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $N = 0$; $Q = -F = -2qa$;
$M = -Fa + F(a + x_4) + M_0 = 2qax_4 + qa^2$.

4. Строим эпюры.

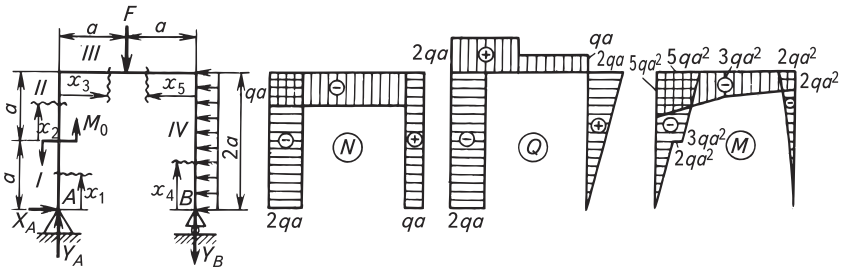


Рис. 1.59

Задача 5. **Построить эпюры** N, Q **и** M **для рамы (рис. 1.59), если заданы** a, q, $F = qa$, $M_0 = qa^2$.

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum F_x = X_A - q \cdot 2a = 0 \Rightarrow X_A = 2qa;$$

$$\sum M_A = M_0 - Fa + q \cdot 2aa - Y_B \cdot 2a = 0,$$

откуда $Y_B = qa$;

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 2a + M_0 + Fa - q \cdot 2aa = 0,$$

откуда $Y_A = 2qa$.

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum F_y = -Y_A - F - Y_B = 2qa - qa - qa = 0.$$

2. Имеем в раме пять участков.

3. Записываем уравнения для N, Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = -Y_A = -2qa$; $Q = -X_A = -2qa$;

$M = -X_A x_1 = -2qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -Y_A = -2qa$; $Q = -X_A = -2qa$;

$M = -X_A(a + x_2) - M_0 = -3qa^2 - 2qax_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = -X_A = -2qa$; $Q = Y_A = 2qa$;

$M = -X_A 2a - M_0 + Y_A x_3 = -5qa^2 + 2qax_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $N = Y_B = qa$; $Q = qx_4$;

$M = -\dfrac{1}{2}qx_4^2$;

V участок: $0 \leqslant x_5 \leqslant a$; $N = -2qa$; $Q = Y_B = qa$;

$M = -q \cdot 2aa - Y_B x_5 = -2qa^2 - qax_5$.

4. Строим эпюры (рис. 1.59).

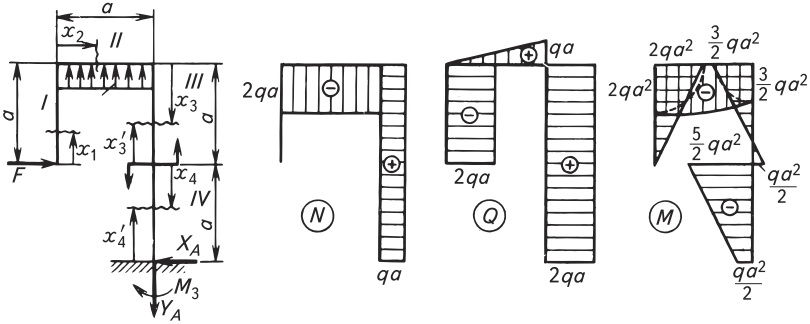


Рис. 1.60

Задача 6. **Построить эпюры** N, Q **и** M **для рамы (рис. 1.60), если заданы** a, q, $F = 2qa$, $M_0 = 3qa^2$.

1. Для контроля эпюр определяем реакции в заделке:

$$\sum F_x = F - X_A = 0 \Rightarrow X_A = F = 2qa;$$

$$\sum F_y = qa - Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = qa;$$

$$\sum M_A = -M_з - Fa - qa\frac{a}{2} + M_0 = 0 \Rightarrow M_з = \frac{1}{2}qa^2.$$

2. В раме четыре участка, задаем произвольные сечения и их координаты.

3. Записываем уравнения для N, Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = 0$; $Q = -F = -2qa$;

$$M = -Fx_1 = -2qax_1;$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -F = -2qa$; $Q = qx_2$;

$$M = -Fa + \frac{1}{2}qx_2^2 = -2qa^2 + \frac{1}{2}qx_2^2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = qa$; $Q = F = 2qa$;

$$M = -Fa + qa\frac{a}{2} + Fx_3 = -\frac{3}{2}qa^2 + 2qax_3;$$

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $N = qa$; $Q = F = 2qa$;

$$M = -Fa + qa\frac{a}{2} - M_0 + F(a + x_4) = -\frac{5}{2}qa^2 + 2qax_4.$$

Не следует забывать, что при составлении уравнений для внутренних усилий внешние нагрузки можно рассматривать по обе стороны от произвольного сечения. При построении эпюр на III и IV участках более простым может оказаться рассмотрение внешних

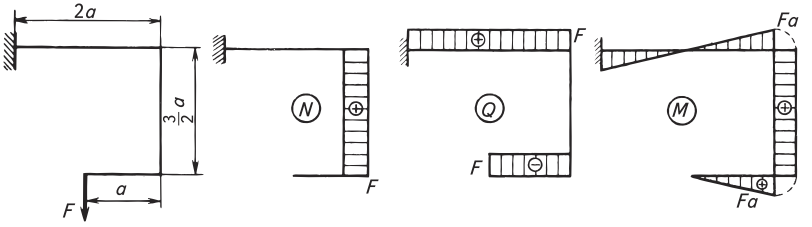


Рис. 1.61

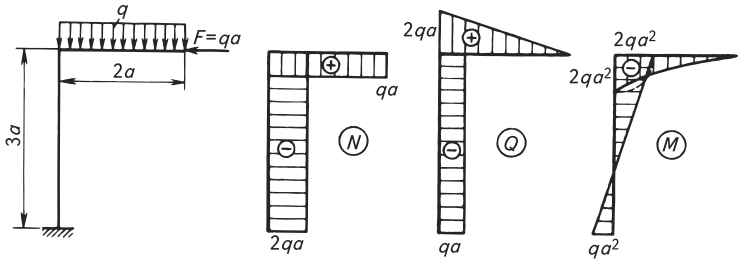


Рис. 1.62

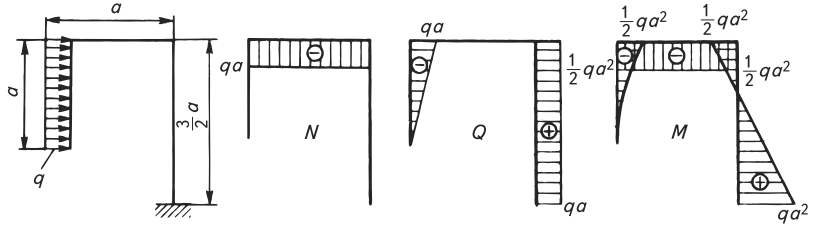


Рис. 1.63

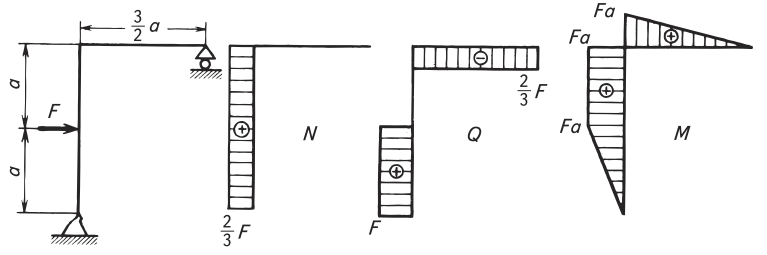


Рис. 1.64

нагрузок, лежащих вниз от произвольного сечения. Тогда уравнения для N, Q, M примут такой вид:

IV участок: $0 \leqslant x_4' \leqslant a$; $N = Y_A = qa$; $Q = X_A = 2qa$;

$$M = -M_з - X_A x_4' = -\frac{1}{2}qa^2 - 2qax_4';$$

III участок: $0 \leqslant x_3' \leqslant a$; $N = qa$; $Q = 2qa$;

$$M = -M_з - X_A(a + x_3') + M_0 = \frac{1}{2}qa^2 - 2qax_3'.$$

Построение по этим уравнениям приводит к тем же эпюрам.

Задача 7. **Построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 1.61), если заданы a, F.**

Задача 8. **Построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 1.62), если заданы a, q, $F = qa$.**

Задача 9. **Построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 1.63), если заданы a, q.**

Задача 10. **Построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 1.64), если заданы a, F.**

ГЛАВА 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Построение эпюр внутренних силовых факторов преследует цель определить *качественную и количественную картину нагруженного бруса* и определить *наиболее нагруженные сечения.* Но, если в сечении действует наибольшее суммарное внутреннее усилие, это еще не означает, что сечение будет наиболее опасным.

Опасным называется сечение, в котором возникают наибольшие напряжения. Напряжение в опасной точке сечения (наиболее нагруженной точке) прямо пропорционально величине внутреннего усилия в этом сечении и обратно пропорционально размерам сечения. Поэтому в брусе, где размеры сечения одинаковы, опасное сечение однозначно определяется по внутреннему усилию из эпюр, в противном случае опасное сечение определяется по напряжениям.

Расчеты на прочность основываются на **условии прочности,** которое заключается в том, что наибольшие напряжения в нагруженном брусе не должны превышать допускаемых напряжений:

$$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma] \quad \text{и} \quad \tau_{\max} \leqslant [\tau].$$

Допускаемые напряжения определяются, как некое опасное напряжение, деленное на рекомендуемое значение коэффициента запаса:

$$[\sigma] = \sigma_{\text{оп}}/[n]; \quad [\tau] = \tau_{\text{оп}}/[n].$$

При статической нагрузке для хрупких материалов за опасное напряжение чаще всего принимается *предел прочности*, для пластичных и хрупкопластичных — *предел текучести*.

Рекомендуемые значения **коэффициента запаса** $[n]$ для материалов: пластичных — $1,4 \ldots 2$; хрупкопластичных — $1,6 \ldots 2,5$; хрупких — $2,5 \ldots 4$.

Следует помнить, что в отличие от пластичных для хрупких материалов предел прочности на сжатие намного превышает предел прочности на растяжение. Соответственно это относится и к допускаемым напряжениям. Поэтому условие прочности необходимо проверять отдельно по растягивающим и сжимающим напряжениям.

Расчеты на жесткость основываются на **условии жесткости** — деформации δ в нагруженном брусе не должны превышать допускаемых $[\delta]$:

$$\delta \leqslant [\delta].$$

Но в большинстве случаев обеспечение прочности гарантирует и достаточную жесткость. Поэтому расчеты на жесткость проводятся в тех случаях, когда предъявляются особые требования к жесткости.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

При растяжении (сжатии) в каждом сечении возникают внутренние *нормальные напряжения*, которые распределяются равномерно по сечению:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N — продольная сила в рассматриваемом сечении; A — площадь сечения.

Деформация (удлинение или укорочение) при растяжении (сжатии)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где Δl — абсолютная деформация участка бруса; l — первоначальная длина участка бруса; E — модуль упругости первого рода материала бруса.

Если продольная сила и площадь сечения зависят от координаты сечения, то

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}.$$

Перемещение какого-либо сечения на i-м участке бруса относительно неподвижного сечения равно сумме деформаций всех предыдущих $i-1$ участков и деформации рассматриваемой части i-го участка т. е.

$$\delta_x = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta l_k + \int_0^{x_i} \frac{N_i(x)\mathrm{d}x_i}{E_i A_i(x)}.$$

В стержнях с заделкой за неподвижное сечение целесообразно принимать заделку.

Эпюра δ связана с эпюрой σ дифференциальной зависимостью, аналогичной зависимости между M и Q при изгибе:

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{E}\sigma.$$

Поэтому для них можно применять все ранее приведенные правила контроля правильности эпюр.

Условие прочности при растяжении (сжатии) имеет вид

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max} \leqslant [\sigma].$$

Из этого условия можно произвести *проверочный расчет на прочность* по определению коэффициента запаса:

$$n = \sigma_{\text{оп}}/\sigma_{\max} \leqslant [n],$$

где $[n]$ — рекомендуемый для данных условий работы и материала коэффициент запаса.

Из условия прочности также можно произвести *проектный расчет* — определить площадь, а затем размеры сечения под заданную нагрузку, предварительно выбрав материал и форму сечения:

$$A \geqslant N/[\sigma].$$

Условие жесткости при растяжении (сжатии) имеет вид

$$\Delta l_{\max} \leqslant [\Delta l],$$

на основе которого также можно провести проверочный и проектный расчеты.

При определении размеров сечения следует руководствоваться рекомендациями ГОСТ 6636—69 на нормальные размеры (см. Приложение 1. Размерности — см. Приложение 6).

Задача 1. **Построить эпюру нормальных напряжений σ и перемещений сечений δ, подобрать размеры квадратного поперечного сечения для бруса (рис. 2.1), если заданы** $F = 20$ кН, $a = 10$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta_{\text{оп}} = \delta_{\text{т}} = 260$ МПа, $[n] = 2$.

1. Определяем реакцию в заделке:

$$\sum F_x = -R + 3F - 2F + F = 0 \Rightarrow R = 2F.$$

2. Разбиваем брус на участки. Для построения эпюры продольных сил N достаточно трех участков. Так как при построении эпюры напряжений σ следует учитывать не только места приложения нагрузки, но и изменение поперечного сечения бруса, то разбиваем брус на четыре участка. Перемещения сечений целесообразно определять относительно естественно неподвижного сечения — заделки. Это определяет порядок рассмотрения участков — слева направо, т. е. от заделки. Проводим произвольные сечения на каждом участке, задаем координаты сечений.

3. Определяем продольную силу по участкам, рассматривая внешние нагрузки слева от сечения:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $N = 2F = 40$ кН;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = -F = -20$ кН;

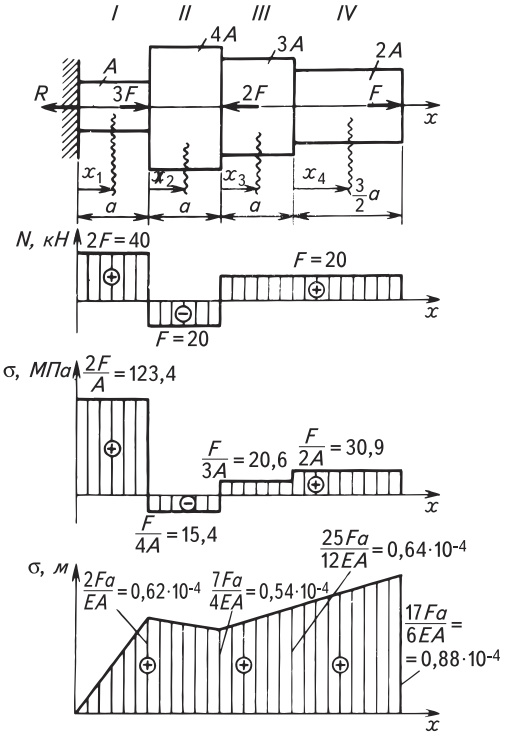


Рис. 2.1

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = F = 20$ кН;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant \dfrac{3}{2}a$; $N = F = 20$ кН.

4. Для определения опасного участка бруса, в котором возникают максимальные напряжения, строим эпюру напряжений σ в общем виде:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $\sigma = 2F/A$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $\sigma = -F/(4A)$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leq a$; $\sigma = F/(3A)$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant \dfrac{3}{2}a$; $\sigma = F/(2A)$.

5. Определяем размеры поперечного сечения бруса на опасном участке. Как видно из эпюры σ, опасным является I участок, в каждом сечении которого действует наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = 2F/A.$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma_т/[n] = 260/2 = 130 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности $[\sigma]_{\max} \leqslant [\sigma]$ находим площадь сечения:

$$A \geqslant 2F/[\sigma] = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 308 \text{ мм}^2.$$

Сторона квадратного сечения

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{308} = 17,6 \text{ мм}.$$

На основании ГОСТ 6636—69 «Нормальные линейные размеры» из ряда $Ra20$ принимаем $b_н = 18$ мм.

Определяем максимальное нормальное напряжение на I участке при выбранном размере $b_н$:

$$A = b_н^2 = 18^2 = 324 \text{ мм}^2 = 3,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma = \frac{2F}{A} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,24 \cdot 10^{-4}} = 123,4 \text{ МПа}.$$

Недогрузка бруса составит

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma}{[\sigma]} 100\% = \frac{130 - 123,4}{130} 100\% = 5,1\%,$$

что допустимо.

6. Определяем нормальные напряжения по участкам:

I участок: $\sigma = 2F/A = 123,4$ МПа;
II участок: $\sigma = -F/(4A) = -15,4$ МПа;
III участок: $\sigma = F/(3A) = 20,6$ МПа;
IV участок: $\sigma = F/(2A) = 30,9$ МПа.

7. Определяем уравнения для перемещений сечений δ относительно заделки. Продольные силы не зависят от координаты сечения ($N = \text{const}$). На i-м участке перемещение сечения с координатой x_i относительно начального сечения на этом участке равно удлинению (укорочению) части этого участка длиной, равной x_i:

$$\Delta l_{x_i} = \frac{N_i x_i}{E_i A_i}.$$

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $\delta_{x_1} = \Delta l_{x_1} = \dfrac{2Fx_1}{EA}$.

Удлинение всего I участка

$$\Delta l_{\text{I}} = \frac{2Fa}{EA}.$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $\Delta l_{x_2} = -\dfrac{Fx_2}{4EA}$.

Укорочение всего II участка

$$\Delta l_{\text{II}} = -\frac{Fa}{4EA}.$$

Перемещение произвольного сечения относительно заделки равно сумме деформаций I участка и части II участка:

$$\delta_{x_2} = \Delta l_{\text{I}} + \Delta l_{x_2} = \frac{2Fa}{EA} - \frac{Fx_2}{4EA}.$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $\Delta l_{x_3} = \dfrac{Fx_3}{3EA}$.

Удлинение всего III участка

$$\Delta l_{\text{III}} = \frac{Fa}{3EA}.$$

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_3} = \Delta l_{\text{I}} + \Delta l_{\text{II}} + \Delta l_{x_3} = \frac{7}{4}\frac{Fa}{EA} + \frac{Fx_3}{3EA}.$$

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant \dfrac{3}{2}a$; $\Delta l_{x_4} = \dfrac{Fx_4}{2EA}$.

Удлинение всего IV участка

$$\Delta l_{\text{IV}} = \frac{3Fa}{4EA}.$$

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_4} = \Delta l_{\text{I}} + \Delta l_{\text{II}} + \Delta l_{\text{III}} + \Delta l_{x_4} = \frac{25}{12}\frac{Fa}{EA} + \frac{Fx_4}{2EA}.$$

По уравнениям строим эпюру перемещений сечений относительно заделки:

при $x_1 = 0$ получаем $\delta = 0$;

при $x_1 = a$ получаем $\delta = 2\dfrac{Fa}{EA} = \dfrac{2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3{,}24 \cdot 10^{-4}} = 0{,}62 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_2 = 0$ получаем $\delta = \dfrac{2Fa}{EA} = 0{,}62 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_2 = a$ получаем $\delta = \dfrac{7Fa}{4EA} = 0{,}54 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_3 = 0$ получаем $\delta = \dfrac{7Fa}{4EA} = 0{,}54 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_3 = a$ получаем $\delta = \dfrac{25Fa}{12EA} = 0{,}64 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_4 = 0$ получаем $\delta = \dfrac{25Fa}{12EA} = 0{,}64 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_4 = \dfrac{3}{2}a$ получаем $\delta = \dfrac{17Fa}{6EA} = 0{,}88 \cdot 10^{-4}$ м.

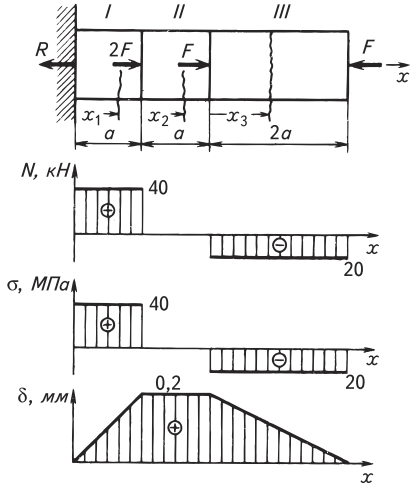


Рис. 2.2

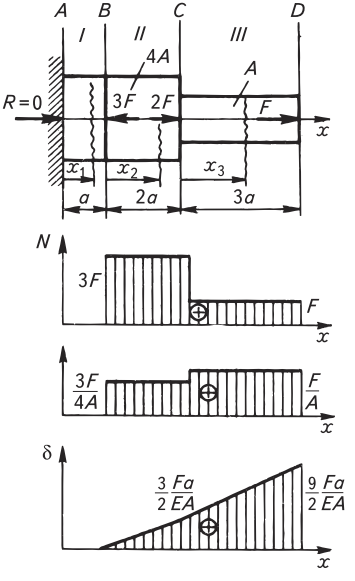


Рис. 2.3

Задача 2. **Для бруса квадратного сечения (рис. 2.2) построить эпюры N, σ, δ, определить напряжения и перемещения сечений, если заданы** $a = 1$ м, $F = 20$ кН, $A = 10$ см^2, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа**.**

Задача 3. **Для ступенчатого бруса квадратного сечения (рис. 2.3) построить эпюры N, σ, δ, определить размеры поперечного сечения из условия прочности и жесткости, если заданы** $a = 1$ м, $F = 16$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\delta] = 1$ мм**.**

1. Определяем реакцию в заделке:

$$\sum F_x = R - 3F + 2F + F = 0 \Rightarrow R = 0.$$

2. Разбиваем брус на три участка и задаем координаты произвольных сечений в направлении от заделки, для того, чтобы эпюру δ построить от заделки.

3. Записываем уравнения для N, σ и δ по участкам в общем виде, считая площадь сечения A известной. Площадь A определим из условия прочности и жесткости.

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Так как реакция заделки равна нулю, то продольная сила $N = 0$, откуда нормальное напряжение $\sigma = 0$ и

перемещения всех сечений I участка равны нулю. Следовательно, и деформация I участка равна нулю: $\Delta l_I = 0$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$;

$$N = 3F; \quad \sigma = 3F/(4A); \quad \Delta l_{x_2} = 3Fx_2/(4EA).$$

Удлинение II участка $\Delta l_{II} = 3Fa/(2EA)$.

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_2} = \Delta l_I + \Delta l_{x_2} = \frac{3}{4}\frac{Fx_2}{EA}.$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 3a$;

$$N = 3F - 2F = F; \quad \sigma = F/A; \quad \Delta l_{x_3} = Fx_3/(EA).$$

Удлинение III участка $\Delta l_{III} = 3Fa/(EA)$.

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_3} = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{x_3} = \frac{3}{2}\frac{Fa}{EA} + \frac{Fx_3}{EA}.$$

4. Строим эпюры:

при $x_2 = 0$ получаем $\delta = 0$;
при $x_2 = 2a$ получаем $\delta = 3Fa/(2EA)$;
при $x_3 = 0$ получаем $\delta = 3Fa/(2EA)$;
при $x_3 = 3a$ получаем $\delta = \delta_{\max} = 9Fa/(2EA)$.

5. Расчет на прочность. Из эпюры σ видно, что равноопасными являются все сечения III участка. В каждом из них возникает наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{\max} = F/A$.

Из условия прочности определяем размеры сечения, удовлетворяющие этому условию:

$$b \geqslant \sqrt{F/[\sigma]} = \sqrt{16 \cdot 10^3/(160 \cdot 10^6)} = 0{,}01 \text{ м} = 10 \text{ мм}.$$

6. Расчет на жесткость. Из эпюры δ видно, что наибольшее перемещение (вправо) получит крайнее сечение D бруса. Согласно условию жесткости, оно не должно превышать заданное значение (допускаемое). Исходя из условия требуемой жесткости $\delta_{\max} \leqslant [\delta]$, получаем размеры сечения, удовлетворяющие этому условию:

$$b \geqslant \sqrt{\frac{9Fa}{2E[\delta]}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001}} = 18{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 18{,}97 \text{ мм}.$$

7. Подбор сечения. Из двух полученных размеров сечения необходимо взять большее. Если взять меньшее, то не будет удовлетворено условие жесткости. Согласно ГОСТ 6636—69, из ряда нормальных размеров $Ra10$ выбираем размер 20 мм. На I и II участках сторону квадратного сечения принимаем равной 40 мм, так как по условию площадь сечения равна $4A$.

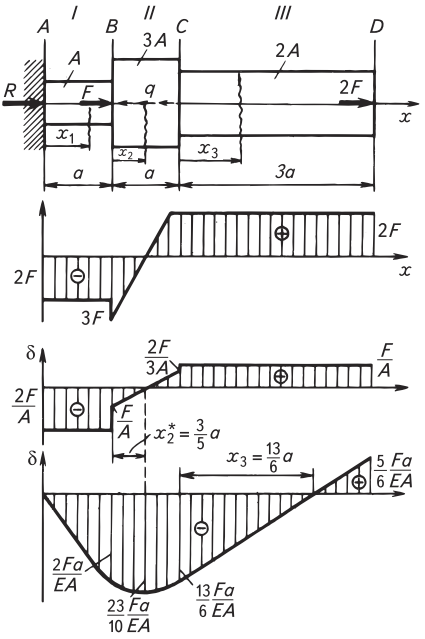


Рис. 2.4

В опасном сечении бруса наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{16 \cdot 10^3}{0,02^2} = 40 \text{ МПа}.$$

Перемещение сечения D

$$\delta = \frac{9Fa}{2EA} = \frac{9 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,02^2} = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,9 \text{ мм}.$$

Задача 4. **Для ступенчатого бруса круглого сечения (рис. 2.4) определить диаметры сечения из условия прочности, построить эпюры N, σ, δ, если заданы $a = 0,5$ м, $F = 10$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $q = 5F/a = 100$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа.**

1. Определяем реакцию заделки:

$$\sum F_x = R + F - qa + 2F = 0 \Rightarrow R = 2F.$$

2. Имеем три участка. Порядок рассмотрения участков и координаты произвольных сечений задаем слева направо, чтобы эпюры перемещений сечений построить относительно заделки.

3. Записываем уравнения для N, σ, δ в общем виде:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $N = -R = -2F$; $\sigma = -2F/A$.

Перемещение сечения с координатой x_1 относительно заделки

$$\delta x_1 = \Delta l_{x_1} = -2Fx_1/(EA);$$

при $x_1 = a$ получим $\delta_B = \Delta l_{x_1=a} = -2Fa/(EA)$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$;

$$N = -R - F + qx_2 = -3F + \frac{5F}{a}x_2;$$

при $x_2 = 0$ получим $N = -3F$; при $x_2 = a$ получим $N = 2F$;

$$\sigma = \frac{-3F + \frac{5F}{a}x_2}{3A} = -\frac{F}{A} + \frac{5}{3}\frac{Fx_2}{Aa};$$

при $x_2 = 0$ получим $\sigma = -F/A$; при $x_2 = a$ получим $\sigma = 2F/(3A)$.

Перемещение сечения с координатой x_2 относительно заделки

$$\delta_{x_2} = \delta_B + \Delta l_{x_2} = -\frac{2Fa}{EA} + \int_0^{x_2} \frac{\left(-3F + \frac{5F}{a}x_2\right)\mathrm{d}x_2}{3EA},$$

откуда

$$\delta_{x_2} = -\frac{2Fa}{EA} - \frac{Fx_2}{EA} + \frac{5}{6}\frac{Fx_2^2}{aEA};$$

при $x_2 = a$ получим перемещение сечения C:

$$\delta_C = -\frac{13}{6}\frac{Fa}{EA}.$$

Определим значение δ при координате $x_2 = x_2^*$, соответствующей $N = 0$. Из уравнения $N = 0$ находим $x_2^* = \frac{3}{5}a$. При $x_2 = \frac{3}{5}a$ перемещение δ будет иметь экстремум:

$$\delta_{x_2=\frac{3}{5}a} = -\frac{2Fa}{EA} - \frac{F\left(\frac{3}{5}a\right)}{EA} + \frac{5}{6}\frac{F}{aEA}\left(\frac{3}{5}a\right)^2 = -\frac{23}{10}\frac{Fa}{EA}.$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 3a$;

$$N = -R - F + qa = -2F - F + \frac{5F}{a}\cdot a = 2F; \quad \sigma = 2F/2A = F/A.$$

Перемещение сечения с координатой x_3 относительно заделки

$$\delta_{x_3} = \delta_C + \Delta l_{x_3} = -\frac{13}{6}\frac{Fa}{EA} + \frac{2Fx_3}{E\cdot 2A} = -\frac{13}{6}\frac{Fa}{EA} + \frac{Fx_3}{EA}.$$

При $x_3 = 3a$ получим перемещение сечения D:

$$\delta_D = -\frac{13}{6}\frac{Fa}{EA} + \frac{3Fa}{EA} = \frac{5}{6}\frac{Fa}{EA}.$$

4. Строим эпюры. Как видно из эпюры δ, сечения с координатой $x_3 = \frac{13}{6}a$, расположенные между заделкой и сечением, смещаются влево, сечения с координатой $x_3 > \frac{13}{6}a$ смещаются вправо.

Сечение на III участке с координатой $x_3 = \dfrac{13}{6}a$ не перемещается после приложения нагрузки.

5. Определим размеры поперечных сечений бруса из условия прочности. Равноопасными являются сечения I участка. В них максимальные напряжения $\sigma_{\max} = 2F/A$. Из условия прочности определяем площадь сечения на I участке:

$$A \geqslant \frac{2F}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

откуда диаметр сечения

$$d \geqslant \sqrt{4A/\pi} = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,6 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6639–69 из ряда $Ra20$ выбираем ближайший бóльший размер $d_{\text{н}} = 14$ мм, тогда площадь сечения $A_{\text{н}} = 1,54 \cdot 10^{-4}$ м^2. Напряжение в опасном сечении при выбранном диаметре

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{1,54 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\Delta_\sigma = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{160 - 130}{160} 100\% = 18,75\%.$$

Недогрузка больше допускаемой, поэтому из ряда $Ra40$ выбираем $d_{\text{н}} = 13$ мм, тогда площадь сечения

$$A_{\text{н}} = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{1,33 \cdot 10^{-4}} = 150,7 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta_\sigma = \frac{160 - 150,7}{160} 100\% = 5,8\%.$$

Принимаем диаметр сечения на I участке $d = 13$ мм. Размеры сечений на других участках определятся исходя из заданных соотношений между площадями сечений.

6. Определим перемещение. Эпюра перемещений в общем виде построена. Перемещения всех сечений выражаются формулой

$$\frac{Fa}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,188 \text{ мм}.$$

Перемещения характерных сечений получим, умножая полученное значение на соответствующие коэффициенты. Максимальное перемещение

$$\delta_{\max} = \frac{23}{10} \cdot 0,188 = 0,43 \text{ мм}.$$

Задача 5. **Для стального бруса, нагруженного сосредоточенными силами и силой тяжести (рис. 2.5), построить эпюры** N, σ, δ, **определить наибольшее напряжение, коэффициент запаса, перемещение сечения** I—I, **если заданы** $a = 0,5$ м, $F = 100$ Н, $A = 20$ см^2; **характеристики материала: модуль упругости** $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, **плотность** $\rho = 8$ т/м^3, **предел текучести** $\sigma_т = 320$ МПа.

Для упрощения расчетов силу F выразим через вес части бруса объемом aA, т. е. $F = kg\rho aA$, откуда

$$k = \frac{F}{g\rho aA} = \frac{100}{10 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, $F = 1,25 g\rho aA$. Здесь значение ускорения свободного падения взято приближенно: $g \simeq 10$ м/с^2. В дальнейшем все расчеты проводятся в буквенных выражениях и лишь в окончательный результат подставлены цифровые данные. В том случае, когда размеры заданы в цифрах, можно принять $a = 1$ м, тогда они будут выражены через a.

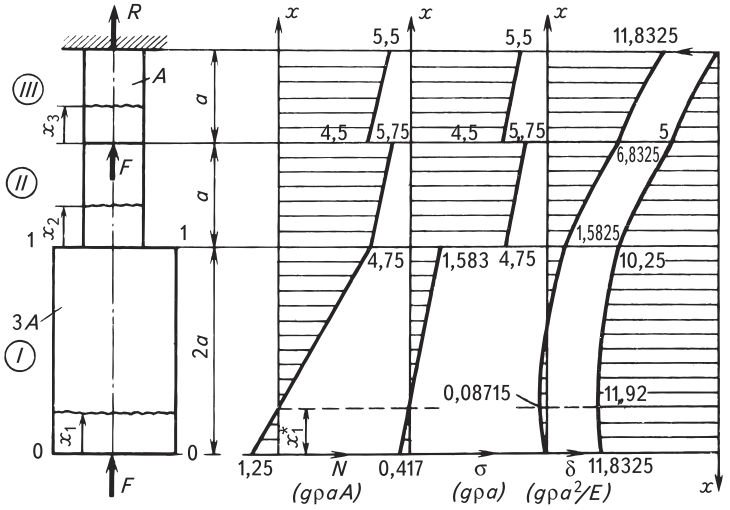


Рис. 2.5

1. Определим реакцию. Произвольно направив ее в заделке, составим уравнение равновесия. Сумма проекций всех сил, включая и вес стержня, должна быть равна нулю:

$$\sum F_x = R + F + F - g\rho(3A \cdot 2a + A \cdot a + A \cdot a) = 0,$$

откуда $R = 8g\rho aA - 2F = 5,5g\rho aA$.

2. Разбиваем брус на участки. На каждом участке проводим произвольное сечение, задаем координату этого сечения. Начало координат помещаем в крайнем нижнем сечении участка. Это означает, что при определении продольной силы будем рассматривать нагрузки, лежащие вниз от сечения.

На каждом участке продольная сила будет равна сумме внешних нагрузок и веса нижележащей части бруса.

3. Составляем уравнения для продольной силы по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$;

$$N = -F + g\rho 3Ax_1 = -1,25g\rho aA + 3g\rho Ax_1;$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$;

$$N = -F + g\rho 3A2a + g\rho Ax_2 = 4,75g\rho aA + g\rho Ax_2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$;

$$N = -2F + 6g\rho aA + g\rho Aa + g\rho Ax_3 = 4,5g\rho aA + g\rho Ax_3.$$

4. Строим эпюру N. На всех участках получили линейную зависимость N от x, поэтому определяем значения N в начале и конце каждого участка и полученные точки соединяем прямой:

I участок: $x_1 = 0$; $N = -1,25g\rho aA$; $x_1 = 2a$; $N = 4,75g\rho aA$;

II участок: $x_2 = 0$; $N = 4,75g\rho aA$; $x_2 = a$; $N = 5,75g\rho aA$;

III участок: $x_3 = 0$; $N = 4,5g\rho aA$; $x_3 = a$; $N = 5,5g\rho aA$.

Все эти графики и представляют собой эпюру распределения продольной силы по длине бруса (рис. 2.5).

Скачки на эпюре соответствуют сечениям, где приложены сосредоточенные силы. Скачок в заделке соответствует найденной ранее реакции.

5. Составляем уравнения для напряжений и перемещений. Чтобы получить перемещения всех сечений относительно заделки, желательно изменить направление обхода и рассматривать все силы от заделки.

При принятом направлении обхода получаем перемещения сечений относительно крайнего сечения на конце бруса. Но простым переносом координатных осей можно эпюру δ перестроить относительно любого сечения, которое мы хотим принять за неподвижное. Поэтому составляем уравнения перемещений, сохранив прежнее направление обхода:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$;

напряжение в произвольном сечении

$$\sigma = N_{\mathrm{I}}/(3A) = -0,4175g\rho a + g\rho x_1;$$

перемещение сечения

$$\delta_{x_1} = \Delta l_{x_1} = \int_0^{x_1} \frac{(-1,25g\rho aA + 3g\rho x_1)\mathrm{d}x_1}{E3A} = \frac{g\rho}{E}(-0,4175ax_1 + 0,5x_1^2).$$

Удлинение всего I участка $\Delta l_{\mathrm{I}} = 1,5825g\rho a^2/E$.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $\sigma = N_{\mathrm{II}}/A = 4,75g\rho a + g\rho x_2$.

Перемещение сечения с координатой x_2 относительно начального сечения 0—0 равно перемещению его относительно начального сечения II участка плюс перемещение конечного сечения I участка относительно начального:

$$\delta_{x_2} = \Delta l_1 + \Delta l_{x_2};$$

$$\Delta l_{x_2} = \int_0^{x_2} \frac{(4,75g\rho aA + g\rho Ax_2)\mathrm{d}x_2}{EA} = \frac{g\rho}{E}(4,75ax_2 + 0,5x_2^2).$$

Тогда

$$\delta_{x_2} = 1,5825g\rho a^2/E + 4,75g\rho ax_2/E + 0,5g\rho x_2^2/E.$$

Удлинение II участка: $\Delta l_{\mathrm{II}} = \Delta l_{x_2=a} = 5,25g\rho a^2/E$.

Перемещение конечного сечения II участка

$$\delta_{x_2=a} = \Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}} = 6,8325g\rho a^2/E.$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $\sigma = N_{\mathrm{III}}/A = 4,5g\rho a + g\rho x_3$.

Аналогично, перемещение сечения с координатой x_3 равно перемещению начального сечения III участка плюс перемещение сечения x_3 относительно этого начального сечения:

$$\delta_{x_3} = \Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}} + \Delta l_{x_3};$$

$$\Delta l_{x_3} = \int_0^{x_3} \frac{(4,5g\rho aA + g\rho Ax_3)\mathrm{d}x_3}{EA} = \frac{g\rho}{E}(4,5ax_3 + 0,5x_3^2).$$

Удлинение III участка $\Delta l_{\mathrm{III}} = \Delta l_{x_3=a} = 5g\rho a^2/E$. Перемещение конечного сечения III участка

$$\delta_{x_3=a} = \Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}} + \Delta l_{\mathrm{III}} = 11,8325g\rho a^2/E.$$

6. По полученным уравнениям строим эпюры.

Уравнения для σ представляют собой линейные функции. Строим их графики по значениям в крайних сечениях участков:

I участок: при $x_1 = 0$ получим $\sigma = -0,417g\rho a$;

при $x_1 = 2a$ получим $\sigma = 1,583g\rho a$;

II участок: при $x_2 = 0$ получим $\sigma = 4,75g\rho a$;
при $x_2 = a$ получим $\sigma = 5,75g\rho a$;

III участок: при $x_3 = 0$ получим $\sigma = 4,5g\rho a$;
при $x_3 = a$ получим $\sigma = 5,5g\rho a$.

Уравнения для δ являются квадратичными функциями на любом участке, график будет представлять собой квадратичную параболу. Для построения параболы на каждом участке, кроме крайних, определяем еще одну-две точки либо проводим анализ характера параболы на основании дифференциальной зависимости

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{E}\sigma.$$

На I участке в сечении, где $\sigma = 0$, на эпюре будет минимум, т. е. вершина параболы. Определим его. Значение координаты сечения, в котором $\sigma = 0$, получим из уравнения для σ, откуда $x_1^* = 0,4175a$. Подставим это значение в уравнение для δ, тогда получим, что

$$\delta_{\min} = \delta_{x_1=0,4175a} = -0,08715g\rho a^2/E.$$

Теперь по трем точкам строим параболу δ на I участке. На II и III участках, судя по эпюре σ, характер графиков одинаков — у парабол нет экстремумов, с ростом координаты значения возрастают. Поэтому строим их приблизительно по двум крайним точкам:

при $x_2 = 0$ получим $\delta = 1,5825g\rho a^2/E$;
при $x_2 = a$ получим $\delta = 6,8325g\rho a^2/E$;
при $x_3 = 0$ получим $\delta = 6,8325g\rho a^2/E$;
при $x_3 = a$ получим $\delta = 11,8325g\rho a^2/E$.

В построенных эпюрах все значения выражены в буквах. Комбинация букв, встречающаяся в выражениях для N, σ, δ, вынесена и указана рядом с осью ординат.

Для построения эпюры в числовых значениях определяем выражения:

для σ: $g\rho a = 10 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 40 \cdot 10^3$ Па;

для N: $g\rho aA = 10 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 80$ Н;

для δ: $g\rho a^2/E = 10 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2/2 \cdot 10^{11} = 1 \cdot 10^{-7}$ м.

Анализ эпюр показывает, что брус на I участке до сечения $x_1^* = 0,4175a$ испытывает сжатие, а на остальной части бруса — растяжение.

Опасным сечением, т. е. сечением с наибольшим напряжением, является конечное сечение II участка, т. е. сечение с координатой $x_2 = a$.

В опасном сечении

$$\sigma_{\max} = 5,75 \cdot 40 \cdot 10^3 = 230 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Коэффициент запаса прочности по текучести

$$n = \sigma_т / \sigma_{\max} = 320 \cdot 10^6 / (230 \cdot 10^3) = 1390.$$

Полученное значение указывает на пренебрежимо малое влияние собственного веса и соизмеримых с ним нагрузок для деталей машин и элементов конструкций из стали при растяжении-сжатии. Реально собственный вес оказывает влияние на прочность лишь при особо больших размерах конструкций.

Эпюра перемещений построена относительно сечения 0—0, преобразуем ее с тем, чтобы она отражала перемещения сечений относительно заделки. Для этого начало координат переносим в заделку в крайнюю точку эпюры со значением $\delta = 11,8325 g\rho a^2/E$. Все значения перемещений сечений от заделки получаем по формуле $\delta' = 11,8325\dfrac{g\rho a^2}{E} - \delta$. Характер графиков на участках не меняется. Эпюра перемещений сечений относительно заделки представлена рядом.

Тогда перемещение сечения 1—1 относительно заделки

$$\delta_{1-1} = \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = 10,25 g\rho^2/E = 1,025 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Задача 6. **Построить эпюры N, σ, δ для стального бруса круглого сечения (рис. 2.6), если заданы $F = 5$ кН, $a = 0,5$ м,**

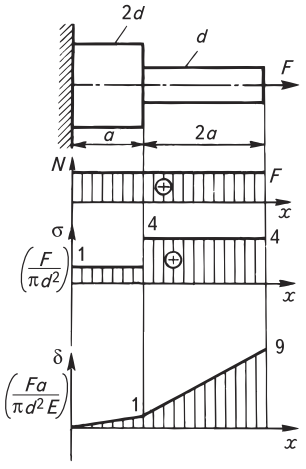


Рис. 2.6

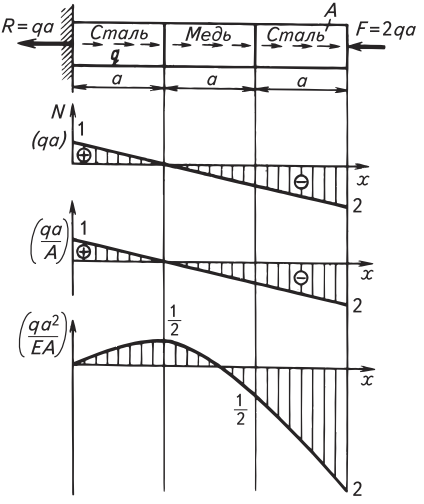


Рис. 2.7

$d = 6,3$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. **Определить коэффициент запаса и удлинение бруса, если предел текучести стали** $\sigma_т = 320$ МПа.

Ответ. $n = 1,99$; $\Delta l = 9 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 7. **Построить эпюры** N, σ, δ **для бруса (рис. 2.7), если заданы** $a = 0,2$ м, $q = 0,2$ кН/м, $F = 2qa$, $A = 0,02$ м^2, **модуль упругости стали** $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, **меди** $E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа. **Определить максимальные значения напряжений и перемещений.**

Ответ. $\max|\sigma| = 2qa/A = 4 \cdot 10^3$ Па; $\max|\delta| = 2qa^2/(EA) = 4 \cdot 10^{-9}$ м.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении в каждом сечении возникают внутренние *касательные напряжения*, которые в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{T}{J_р}\rho,$$

где T — крутящий момент в сечении бруса; ρ — расстояние от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение; $J_р$ — полярный момент инерции сечения. Для круглого сечения $J_р = \dfrac{\pi d^4}{32}(1 - \alpha^4) \simeq 0,1d^4(1 - \alpha^4)$, где $\alpha = d_в/d$ (рис. 2.8).

Максимальные касательные напряжения возникают на контуре сечения:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_р},$$

где $W_р = \dfrac{J_р}{\rho_{max}} = \dfrac{J_р}{(d/2)}$ — полярный момент сопротивления сечения. Для круглого сечения $W_р = \dfrac{\pi d^3}{16}(1 - \alpha^4) \simeq 0,2d^3(1 - \alpha^4)$.

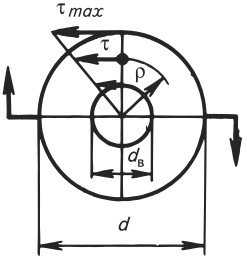


Рис. 2.8

Если крутящий момент и диаметр сечения на участке бруса зависят от координаты сечения x, то *угол закручивания сечения относительно начального сечения*

$$\varphi_x = \int_0^x \frac{T\,\mathrm{d}x}{GJ_р},$$

где G — модуль упругости второго рода.

Если крутящий момент и диаметр сечения являются постоянными величинами, то *на участке длиной* l *угол закручивания*

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_р}.$$

Угол закручивания сечения на i-м участке относительно неподвижного сечения равен сумме углов закручивания всех предыдущих $i-1$ участков плюс угол закручивания данного сечения с координатой x_i относительно начального сечения i-го участка, т. е.

$$\varphi_{0-x} = \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_k + \int_0^{x_i} \frac{T_i}{G_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{J_{\mathrm{p}i}}.$$

Для неподвижного бруса угол закручивания целесообразно определять относительно заделки. Для вращающегося вала за неподвижное следует принять сечение, где установлен ведущий шкив или ведущее зубчатое колесо.

Эпюра φ связана с эпюрой T дифференциальной зависимостью аналогично связи эпюры M с эпюрой Q при изгибе:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{GJ_{\mathrm{p}}} T.$$

Условие прочности при кручении имеет вид (см. стр. 60)

$$\tau_{\max} \leqslant [\tau].$$

Из этого условия можно провести *проверочный расчет* по определению коэффициента запаса:

$$n = \tau_{\text{оп}}/\tau_{\max} \leqslant [n],$$

где $[n]$ — рекомендуемый для данных условий работы и материала коэффициент запаса, или провести *проектный расчет* — определить диаметр сечения под заданную нагрузку, предварительно выбрав материал:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}.$$

Расчеты на жесткость основываются на *условии жесткости:*

$$\varphi \leqslant [\varphi] \quad \text{или} \quad \overline{\varphi} \leqslant [\overline{\varphi}],$$

где $\overline{\varphi} = T/(GJ_{\mathrm{p}})$ — относительный угол закручивания, т. е. угол закручивания, отнесенный к единице длины бруса. При определении диаметра сечения следует руководствоваться рекомендациями ГОСТ 6636—69 на нормальные размеры (см. Приложение 1).

Задача 1. **Для стержня (рис. 2.9) построить эпюру крутящих моментов T, максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$, углов закручивания φ, определить диаметры сечений и максимальный угол закручивания, если заданы** $d' = 2d$, $a = 1$ м, $M = 5$ кН$\cdot$м, $[\tau] = 40$ МПа, $G = 0{,}4E = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

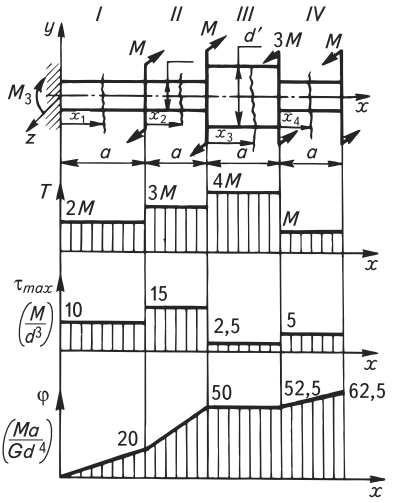


Рис. 2.9

1. Определяем момент в заделке из уравнения моментов относительно оси x:

$$\sum M_x = M + 3M - M - M - M_з = 0 \Rightarrow M_з = 2M.$$

2. Разбиваем брус на четыре участка. Нумерацию участков и координату произвольного сечения на каждом участке задаем слева; это означает, что при определении крутящего момента мы будем рассматривать моменты слева от произвольного сечения. Такое направление обхода выбираем для того, чтобы сразу построить эпюру углов закручивания сечения относительно единственного неподвижного сечения — заделки.

3. Составляем уравнения для крутящего момента по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $T = M_з = 2M$;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $T = M_з + M = 3M$;
III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $T = M_з + M + M = 4M$;
IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $T = M_з + M + M - 3M = M$.

Строим графики T на каждом участке. Так как крутящий момент на каждом участке постоянный, то графики — прямые, параллельные оси x.

Проверяем эпюру по скачкам. Скачки на эпюре должны быть только в сечениях, где приложен сосредоточенный момент. Величина скачка должна быть равна этому моменту. Построенная эпюра подтверждает правильность найденного ранее $M_з$.

4. Составляем уравнения для максимальных напряжений и углов закручивания:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$;

$$W_\text{р} = 0,2d^3, \quad J_\text{р} = 0,1d^4; \quad \tau_\text{max} = \frac{T}{W_\text{р}} = \frac{2M}{0,2d^3} = \frac{10M}{d^3};$$

$$\varphi_{x_1} = \int_0^{x_1} \frac{T dx_1}{GJ_\text{р}} = \frac{2Mx_1}{G0,1d^4} = \frac{20Mx_1}{Gd^4};$$

при $x_1 = a$ $\varphi_{x_1=a} = \varphi_\text{I} = 20Ma/(Gd^4)$, где φ_I — угол закручивания крайнего сечения I участка.

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $W_\text{р} = 0,2d^3$; $J_\text{р} = 0,1d^4$;

$$\tau_\text{max} = \frac{T}{W_\text{р}} = \frac{15M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_2} = \varphi_\text{I} + \varphi_{x_2}; \quad \varphi_{x_2} = \int_0^{x_2} \frac{T dx_2}{GJ_\text{р}} = \frac{30Mx_2}{Gd^4};$$

при $x_3 = a$ $\varphi_{x_2=a} = \varphi_\text{II} = 30Ma/(Gd^4)$.

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $W_\text{р} = 0,2(2d)^3 = 1,6d^3$; $J_\text{р} = 0,1(2d)^4 = 1,6d^4$;

$$\tau_\text{max} = \frac{T}{W_\text{р}} = \frac{2,5M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_3} = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} + \varphi_{x_3};$$

$$\varphi_{x_3} = \int_0^{x_3} \frac{T dx_3}{GJ_\text{р}} = \frac{2,5Mx_3}{Gd^4};$$

при $x_3 = a$ $\varphi_{x_3=a} = \varphi_\text{III} = 2,5Ma/(Gd^4)$.

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $W_\text{р} = 0,2d^3$; $J_\text{р} = 0,1d^4$;

$$\tau_\text{max} = \frac{T}{W_\text{р}} = \frac{5M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_4} = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} + \varphi_\text{III} + \varphi_{x_4};$$

$$\varphi_{x_4} = \int_0^{x_4} \frac{T dx_4}{GJ_\text{р}} = \frac{10Mx_4}{Gd^4};$$

при $x_4 = a$ $\varphi_{x_4=a} = \varphi_\text{IV} = 10Ma/(Gd^4)$.

По полученным уравнениям строим графики τ_max и φ на каждом участке. Графики τ_max — прямые, параллельные оси x, так как $\tau_\text{max} = \text{const}$ на каждом участке; графики φ — наклонные прямые:

при $x_1 = 0$ получим $\varphi = 0$;
при $x_1 = a$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} = 20Ma/(Gd^4)$;
при $x_2 = 0$ получим $\varphi = \varphi_\text{I}$;
при $x_2 = a$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} = 50Ma/(Gd^4)$;
при $x_3 = 0$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II}$;
при $x_3 = a$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} + \varphi_\text{III} = 52,5Ma/(Gd^4)$;
при $x_4 = 0$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} + \varphi_\text{III}$;
при $x_4 = a$ получим $\varphi = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} + \varphi_\text{III} + \varphi_\text{IV} = 62,5Ma/(Gd^4)$.

5. Анализ эпюры $\tau_{\max}$ показывает, что наиболее нагруженным, т. е. опасным, является II участок, на котором все сечения равнонагружены. Исходя из условия прочности, определим диаметр в опасном сечении бруса:

$$\max|\tau_{\max}| = 15M/d^3 \leqslant [\tau],$$

откуда $d \geqslant \sqrt[3]{15M/[\tau]}$.

Подставляем цифровые данные:

$$d \geqslant \sqrt[3]{15 \cdot 5 \cdot 10^3/(40 \cdot 10^6)} = 0,123 \text{ м} = 123 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—69 (см. Приложение 1) выбираем диаметр $d_{\text{н}} = 120$ мм ($Ra40$).

Проверяем правильность выбора такого размера. Напряжение в опасном сечении стержня

$$\tau_{\max} = \frac{15M}{d_{\text{н}}^3} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{(0,12)^3} = 4,34 \cdot 10^6 \text{ Па} = 43,4 \text{ МПа}.$$

Перегрузка (напряжение превышает допускаемое) составляет

$$\Delta_\tau = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100\% = \frac{43,4 - 40}{40} 100\% = 8,5\%.$$

Полученное значение превышает 5%, поэтому выбираем из $Ra40$ размер $d_{\text{н}} = 130$ мм и проверяем его аналогично:

$$\tau_{\max} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{0,13^2} = 34,14 \text{ МПа}.$$

Недогрузка (напряжение меньше допускаемого) составляет

$$\Delta_\tau = \frac{[\tau] - \tau_{\max}}{[\tau]} 100\% = \frac{40 - 34,14}{40} 100\% = 14,65\%.$$

Полученная недогрузка в пределах рекомендуемой нормы — не более 15%. На III участке, по условию, $d' = 2d = 260$ мм. Таким образом, только на опасном участке напряжения будут близки к допускаемым, на остальных участках они будут значительно меньше. Так всегда получается, если задана конфигурация бруса.

6. Определяем угол закручивания крайнего сечения относительно заделки:

$$\max\varphi = \frac{62,5Ma}{Gd_{\text{н}}^4} = \frac{62,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot (0,13)^4} = 0,137 \text{ рад} = 7,8^\circ.$$

Задача 2. **Построить эпюры T, $\tau_{\max}$, φ для стального бруса (рис. 2.10), если заданы $M = 4$ кН·м, $a = 0,5$ м, $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па, $d = 10$ см, $m = 2M/a = 16$ кН · м/м. Определить коэффициент запаса и максимальный угол закручивания, если предел текучести $\tau_{\text{т}} = 80$ МПа.**

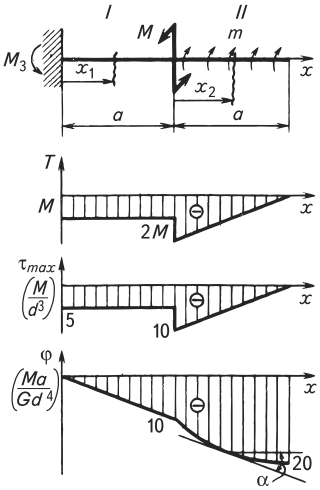


Рис. 2.10

1. Определяем момент в заделке:

$$\sum M_x = -M_з - M + ma = 0 \Rightarrow M_з = M.$$

2. Разбиваем брус на два участка, задаем произвольные сечения.
3. Записываем уравнения для T, $\tau_{\max}$, φ по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = -M_з = -M$;

$$\tau_{\max} = \frac{-M}{0,2d^3} = -\frac{5M}{d^3}.$$

Угол закручивания сечения с координатой x_1 относительно заделки

$$\varphi_{x_1} = \int_0^{x_1} \frac{(-M)\mathrm{d}x}{G \cdot 0,1d^4} = -\frac{10Mx_1}{Gd^4}.$$

При $x_1 = a$ получаем угол закручивания крайнего сечения I участка относительно заделки

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_{x_1=a} = -\frac{10Ma}{Gd^4}.$$

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$;

$$T = -M_з - M + mx_2 = -2M + \frac{2M}{a}x_2;$$

$$\tau_{\max} = \frac{-2M + (2M/a)x_2}{0,2d^3} = -10\frac{M}{d^3} + 10\frac{M}{d^3}\frac{x_2}{a};$$

при $x_2 = 0$ получим $T = -2M$; $\tau_{\max} = -10M/d^3$;
при $x_2 = a$ получим $T = 0$; $\tau_{\max} = 0$.

Угол закручивания сечения с координатой x_2 относительно заделки

$$\varphi_{0-x_2} = \varphi_{\text{I}} + \varphi_{x_2} = -\frac{10Ma}{Gd^4} + \int_0^{x_2} \frac{(2Mx_2/a - 2M)\mathrm{d}x_2}{G0,1d^4} =$$

$$= -\frac{10Ma}{Gd^4} - \frac{20Mx_2}{Gd^4} + \frac{10Mx_2^2}{Gd^4a}.$$

При $x_2 = 0$ получим угол закручивания крайнего сечения II участка относительно заделки: $\varphi = -20Ma/(Gd^4)$.

4. Строим эпюры. На II участке эпюра φ будет представлять собой параболу выпуклостью вниз. Это можно подтвердить двумя способами: 1) дать одно-два значения x_2, кроме крайних, определить φ и построить эпюру по точкам; 2) определить тангенс угла наклона касательной к эпюре φ (рис. 2.10) и проанализировать его изменение:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_2} = \frac{20Mx_2}{Gd^4a} - \frac{20M}{Gd^4}.$$

С увеличением x_2 угол α уменьшается (по абсолютной величине), и при $x_2 = a$ угол наклона касательной равен нулю, т. е. $\alpha = 0$. Следовательно, парабола имеет вершину в этом сечении. К этому выводу можно прийти, если использовать дифференциальную зависимость $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{GJ_{\text{p}}}T$. В сечении, где $T = 0$, на эпюре φ — экстремум.

5. Определяем коэффициент запаса.

Опасным является сечение с координатой $x_2 = 0$, в этом сечении возникают максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{10M}{d^3}.$$

Коэффициент запаса прочности в этом сечении

$$n = \frac{\tau_{\text{т}}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{\text{т}}d^3}{10M} = \frac{80 \cdot 10^6 \cdot 0,1^3}{10 \cdot 4 \cdot 10^3} = 2,$$

что соответствует рекомендуемому для пластичных материалов значению $[n] = 1,4 \ldots 2$.

6. Определяем максимальный угол закручивания:

$$\varphi_{\max} = \frac{20Ma}{Gd^4} = \frac{20 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1^4} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,3^\circ.$$

Задача 3. **Вал вращается равномерно (рис. 2.11). Построить эпюры T и φ, определить диаметр вала, максимальный угол закручивания, если заданы $M = 5$ кН $\cdot$ м, $a = 10$ см, $m = M/a$, $[\tau] = 80$ МПа, $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па. Моменты трения в подшипниковых опорах пренебрежимо малы.**

1. Поверим, обеспечивается ли равномерное вращение вала. Сумма моментов, действующих на вал, должна быть равна нулю:

$$\sum M_x = M + 2M - 5M + m2a =$$

$$= -2M + \frac{M}{a}2a = 0.$$

Следовательно, вал вращается равномерно в направлении момента ведущего шкива $(5M)$.

2. Примем сечение A условно неподвижным. Разбиваем вал на три участка, задаем произвольные сечения, отсчет координат сечений — слева направо. Диаметр вала на всех участках одинаков, поэтому эпюру касательных напряжений можно не строить, она будет повторять эпюру крутящих моментов.

3. Записываем уравнения для T и φ по участкам:

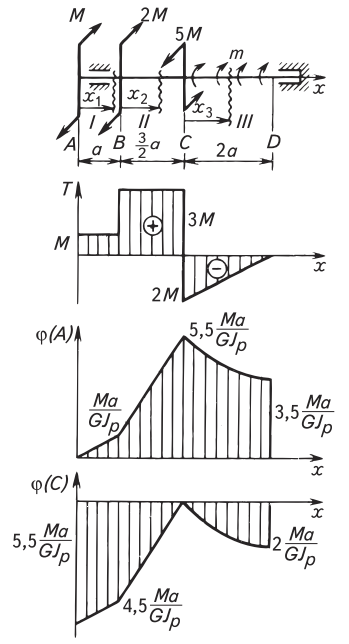


Рис. 2.11

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = M$; $\varphi_{x_1} = Mx_1/(GJ_\text{р})$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{3}{2}a$;

$$T = M + 2M = 3M; \quad \varphi_{x_2} = \frac{3Mx_2}{GJ_\text{р}},$$

при $x_2 = \dfrac{3}{2}a$ получим $\varphi_\text{II} = \dfrac{9Ma}{2GJ_\text{р}}$;

$$\varphi_{A-x_2} = \varphi_\text{I} + \varphi_{x_2} = \frac{Ma}{GJ_\text{р}} + \frac{3Mx_2}{GJ_\text{р}};$$

при $x_2 = \dfrac{3}{2}a$ получим $\varphi_{CA} = \varphi_\text{I} + \varphi_\text{II} = 5,5Ma/(GJ_\text{р})$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 2a$;

$$T = M + 2M - 5M + mx_3 = -2M + \frac{M}{a}x_3;$$

при $x_3 = 0$ получим $T = -2M$; при $x_3 = 2a$ получим $T = 0$;

$$\varphi_{x_3} = \int_0^{x_3} \frac{\left(-2M + \frac{M}{a}x_3\right)}{GJ_\text{р}} = -2\frac{Mx_3}{GJ_\text{р}} + \frac{Mx_3^2}{2GJ_\text{р}};$$

при $x_3 = 2a$ получим $\varphi_{\text{III}} = -\dfrac{2Ma}{GJ_\text{р}}$;

$$\varphi_{A-x_3} = \varphi_{CA} + \varphi_{x_3} = 5{,}5\frac{Ma}{GJ_\text{р}} - 2\frac{Mx_3}{2GJ_\text{р}} + \frac{1}{2}\frac{Mx_3^2}{GJ_\text{р}}.$$

График φ на III участке — парабола. Определяем значения φ в крайних сечениях участка:

при $x_3 = 0$ получим $\varphi_{Ax_3} = 5{,}5Ma/(GJ_\text{р})$;
при $x_3 = 2a$ получим $\varphi_{Ax_3} = 3{,}5Ma/(GJ_\text{р})$.

Так как в этом сечении $T = 0$, то на эпюре φ в этом сечении — экстремум.

4. Строим эпюры. Эпюру углов закручивания целесообразно построить относительно сечения, где установлен ведущий шкив или ведущее зубчатое колесо. В рассматриваемой задаче это будет сечение C.

Сместив ось x вверх на величину $\varphi_{CA} = 5{,}5Ma/(GJ_\text{р})$, получим эпюру углов закручивания относительно сечения C. На эпюрах углы закручивания относительно сечений A и C обозначены соответственно $\varphi(A)$ и $\varphi(C)$ (рис. 2.11).

5. Определим диаметр вала. Опасным является II участок. В каждом сечении этого участка возникают максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{W_\text{р}} = \frac{15M}{d^3}.$$

Из условия прочности $\tau_{\max} \leqslant [\tau]$ определяем диаметр вала в опасных сечениях II участка:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{15M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6}} = 0{,}978 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 97{,}8 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—69 (см. Приложение 1) принимаем $d_\text{н} = 100$ мм ($Ra40$). При таком диаметре максимальные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{15M}{d_\text{н}^3} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{(0{,}1)^3} = 75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta = \frac{[\tau] - \tau_{\max}}{[\tau]} 100\% = \frac{80 - 75}{80} 100\% = 6{,}25\%,$$

т. е. меньше предельного допускаемого значения 15%, что указывает на правильный выбор размера.

6. Определим максимальный угол закручивания.

По отношению к ведущему шкиву или зубчатому колесу наибольший угол закручивания получит сечение A:

$$\varphi_{CA} = 5,5\frac{Ma}{GJ_{\text{р}}} = 55\frac{Ma}{Gd_{\text{н}}^4}.$$

Подставляя значения, получим

$$\varphi_{CA} = 55 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,1/(0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1^4) = 0,0034 \text{ рад} = 0,2°.$$

Задача 4. **Стальной вал вращается равномерно с частотой** $n = 200$ об/мин **(рис. 2.12). Построить эпюры** T, $\tau_{\max}$, φ, **определить диаметр вала, максимальный угол закручивания, если задано, что мощность на ведущем шкиве** $P = 2$ кВт, $a = 0,2$ м, **модуль упругости второго рода материала вала** $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па, $[\tau] = 50$ МПа, **моменты трения подшипников пренебрежимо малы.**

При решении задачи необходимо воспользоваться формулой, связывающей крутящий момент, угловую скорость и мощность: $P = T\omega$, где $\omega = \pi n/30$, рад/с.

Ответ. $d_{\text{н}} = 22$ мм. $\varphi_{\max} = 0,0194$ рад.

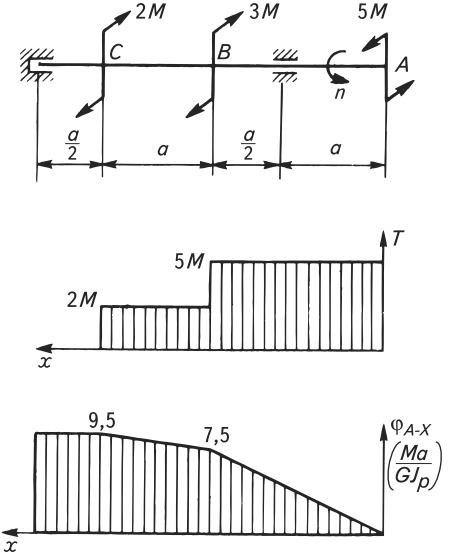


Рис. 2.12

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе в каждом сечении в общем случае возникают внутренние нормальные и касательные напряжения. *Нормальные напряжения* при изгибе в произвольной точке поперечного сечения (рис. 2.13)

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y,$$

где M_z — изгибающий момент в сечении; J_z — момент инерции поперечного сечения относительно оси z; y — координата точки, в которой определяется напряжение.

В дальнейшем, так как рассматривается изгиб в одной плоскости, индекс z опускается.

Касательные напряжения, возникающие в сечениях при изгибе, на порядок меньше нормальных, поэтому при расчетах на прочность ими обычно пренебрегают.

Наибольшие напряжения возникают в наиболее удаленных от оси изгиба z точках сечения. Для симметричных относительно оси z сечений

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W},$$

где $W = J/(h/2)$ — осевой момент сопротивления (относительно оси z); h — высота сечения.

Для прямоугольного сечения с размерами b и h

$$J = bh^3/12; \quad W = bh^2/6.$$

Для кольцевого сечения с наружным диаметром d и внутренним $d_в = \alpha d$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}(1-\alpha^4) \simeq 0,05d^4(1-\alpha^4); \quad W = \frac{\pi d^3}{32}(1-\alpha^4) \simeq 0,1d^3(1-\alpha^4).$$

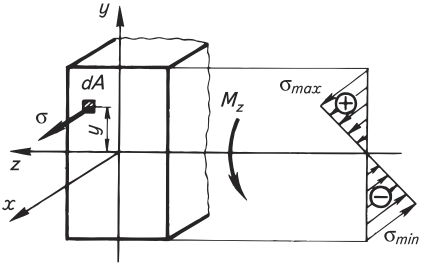


Рис. 2.13

Для прокатных сечений (двутавр, швеллер и др.) значения всех геометрических характеристик указаны в ГОСТах (см. Приложения 2, 3).

Эпюры максимальных нормальных напряжений для балок не строят, так как балки, как правило, имеют одинаковое сечение по всей длине и эпюра напряжений повторяет эпюру изгибающих моментов. Поэтому опасное сечение определяется по эпюре моментов, так как в том сечении, где действует наибольший (по абсолютной величине) момент, возникают и наибольшие напряжения.

На основе **условия прочности** $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$ проводят либо *проверочный расчет* на прочность — определяют коэффициент запаса n и сравнивают его с рекомендуемым значением $[n]$ (см. стр. 60):

$$n = \sigma_{\text{оп}}/\sigma_{\max} \leqslant [n],$$

либо *проектный* — подбирают поперечное сечение балки по осевому моменту сопротивления сечения:

$$W \geqslant M_{\max}/[\sigma].$$

При заданной форме сечения по W определяют все размеры сечения. Для двутавра, швеллера из таблиц стандарта выбирают номер балки требуемого профиля с ближайшим к найденному значением W. При этом допускаемая перегрузка не должна превышать 5%, а недогрузка — 15%.

Задача 1. **Для стальной балки (см. рис. 1.48) определить размеры квадратного поперечного сечения, если допускаемое напряжение** $[\sigma] = 160$ МПа**. Эпюра изгибающих моментов для этой балки приведена на рисунке.**

Из эпюры определяем опасное сечение. Это будет сечение в опоре B, где действует максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 4$ кН·м.

Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W \geqslant M_{\max}/[\sigma].$$

Для квадратного сечения ($h = b$) осевой момент сопротивления

$$W = b^3/6,$$

где b — сторона квадратного сечения. Отсюда получаем

$$b \geqslant \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 0{,}05313 \text{ м} = 53{,}13 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6639—69 на нормальные линейные размеры из $Ra40$ выбираем $b_{\text{н}} = 53$ мм, тогда $W_{\text{н}} = 0{,}053^3/6 = 2{,}48 \cdot 10^{-5}$ м^3.

Максимальное напряжение в балке с выбранным размером

$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W_{\text{н}} = 4 \cdot 10^3/(2,48 \cdot 10^{-5}) = 161,21 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составит

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{161,21 - 160}{160} 100\% = 0,76\%,$$

что не превышает допускаемого значения.

Задача 2. **Для стальной балки (см. рис. 1.50) определить номер двутаврового сечения, если допускаемое напряжение** $[\sigma] = 140$ МПа**. Эпюра изгибающих моментов для балки приведена на рисунке.**

По эпюре находим опасное сечение балки, где действует максимальный по абсолютной величине изгибающий момент. Это сечение находится на правой опоре балки: $M_{\max} = 7,4$ кН $\cdot$ м.

Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления W, который определяем из условия прочности:

$$W \geqslant M_{\max}/[\sigma] = 7,4 \cdot 10^3/(140 \cdot 10^6) = 0,053 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 53 \text{ см}^3.$$

По таблице (см. Приложение 2) выбираем двутавр № 12 с $W_{\text{н}} = 58,4$ см^3. Максимальное напряжение в балке выбранного профиля

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н}}} = \frac{7,4 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 126,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 126,7 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{140 - 126,7}{140} 100\% = 9,5\%,$$

что не превышает допускаемого значения.

Задача 3. **Для стальной двутавровой балки профиля № 20 (**$W = 184$ см^3**) (рис. 2.14) определить коэффициент запаса, если заданы** $M_0 = 40$ кН $\cdot$ м**,** $F = 10$ кН**,** $q = 10$ кН/м**,** $a = 2$ м**. Предел текучести стали** $\sigma_{\text{т}} = 250$ МПа**.**

1. Определяем реакции и строим эпюры Q и M. После решения уравнения равновесия получим

$$Y_A = Y_B = 25 \text{ кН}.$$

Эпюры приведены на рис. 2.14. В опасном сечении максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 31,25$ кН $\cdot$ м.

2. Определяем максимальное напряжение в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{31,25 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 170 \cdot 10^6 \text{ Па} = 170 \text{ МПа}.$$

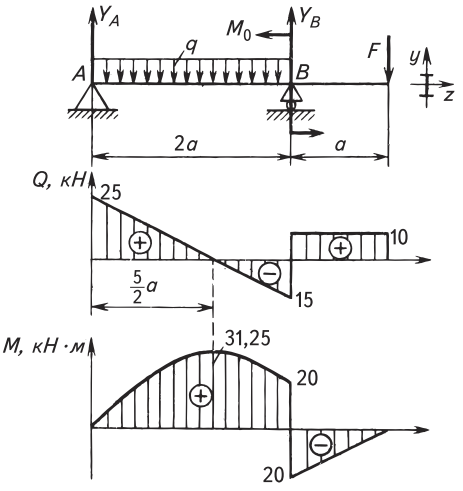


Рис. 2.14

Коэффициент запаса $n = \sigma_т/\sigma_{\max} = 250/170 = 1,47$, что соответствует рекомендуемым значениям для пластичных материалов в пределах $1,4 \ldots 2$.

Задача 4. **Подобрать прямоугольное** ($h = 2b$) **сечение деревянной балки (рис. 2.15), если заданы** $M_0 = 20$ кН · м**,** $q = 10$ кН/м**,** $a = 2$ м **допускаемое напряжение** $[\sigma] = 12$ МПа**.**

1. Определяем реакции и строим эпюры q и M. Эпюры приведены на рис. 2.15. Изгибающий момент в опасном сечении $M_{\max} = 33,3$ кН · м.

2. Подбираем сечение. Из условия прочности находим осевой момент сопротивления сечения

$$W \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{33,3 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Для прямоугольного сечения момент сопротивления

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3,$$

откуда определяем

$$b \geqslant \sqrt[3]{\frac{3W}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,161 \text{ м} = 161 \text{ мм}.$$

Из ряда $Ra20$ (ГОСТ 6636—69) выбираем $b_н = 160$ мм. Тогда высота сечения $h = 2b = 320$ мм.

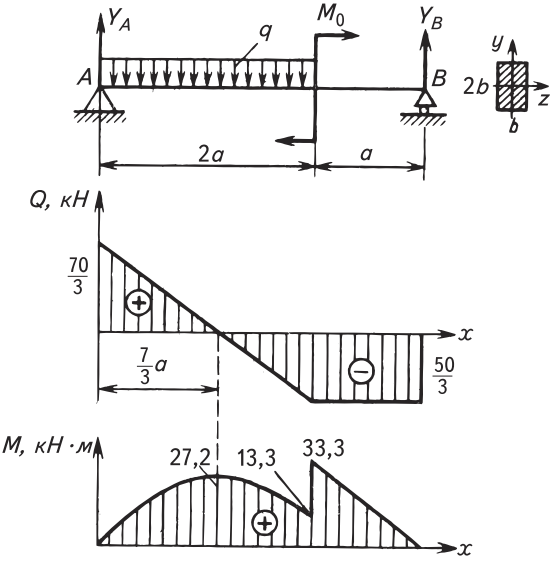


Рис. 2.15

Определим перегрузку. При выбранных размерах

$$W_{\text{н}} = \frac{2}{3} b_{\text{н}}^3 = \frac{2}{3} 0,16^3 = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н}}} = \frac{33,3 \cdot 10^3}{2,74 \cdot 10^{-3}} = 12,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,2 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составит

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{12,2 - 12}{12} 100\% = 1,7\%,$$

что в пределах допускаемых значений.

Задача 5. **Подобрать сечение стальной балки, состоящей из двух швеллеров (рис. 2.16), под нагрузку** $M_0 = 20$ кН · м, $F = 10$ кН, $q = 10$ кН/м, **если заданы** $a = 2$ м, **допускаемое напряжение** $[\sigma] = 160$ МПа**.**

1. Строим эпюры Q и M. Эпюры приведены на рис. 2.16. Опасное сечение — заделка. Максимальный изгибающий момент в заделке, $M_{\text{з}} = 80$ кН · м.

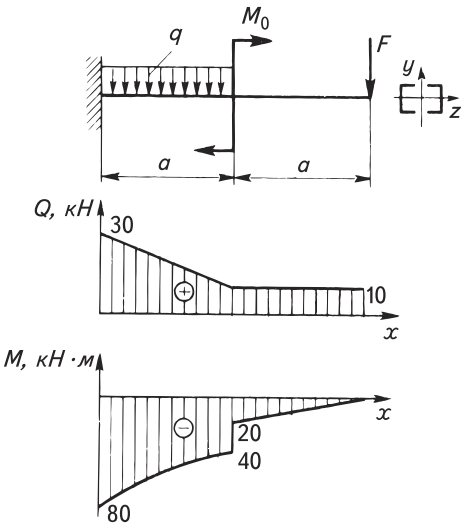


Рис. 2.16

2. Подбираем сечение. Из условия прочности находим

$$W \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8240—72 (см. Приложение 3) выбираем два швеллера № 24 с $W_{\text{н}} = 265$ см^3 (для каждого).

Максимальные напряжения в балке из выбранных двух швеллеров

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2W_{\text{н}}} = \frac{80 \cdot 10^3}{2 \cdot 265 \cdot 10^6} = 151 \cdot 10^6 \text{ Па} = 151 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{160 - 151}{160} 100\% = 5,63\%,$$

что в пределах допускаемых значений.

Задача 6. **Подобрать размеры кольцевого сечения рамы (рис. 2.17) при** $\alpha = d_{\text{в}}/d = 0,5$ **под нагрузку** $q = 20$ кН/м, $F = 2qa = 40$ кН, $M_0 = 2qa^2 = 20$ кН · м**, если заданы** $a = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа**.**

1. Определяем реакции и строим эпюры, окончательный вид которых приведен на рис. 2.17. Максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 40$ кН · м.

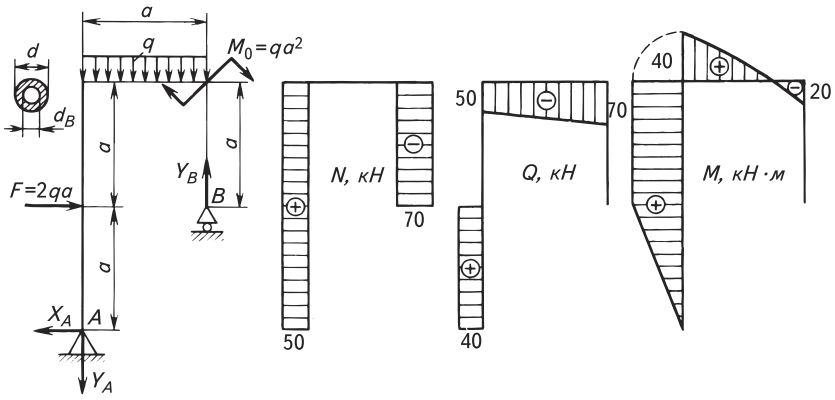


Рис. 2.17

2. Подбираем сечение. Из условия прочности находим осевой момент сопротивления сечения

$$W \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3.$$

Определяем наружный диаметр сечения; так как $W = \dfrac{\pi d^3}{32}(1-\alpha^4)$, то

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 250}{3,14(1-0,5^4)}} = 13,9 \text{ см}.$$

Принимаем по ГОСТ 6639—69 из ряда $Ra20$ $d_{\text{н}} = 140$ мм. Внутренний диаметр сечения будет равен $d_{\text{в}} = \alpha d_{\text{н}} = 0,5 \cdot 140 = 70$ мм.

Определим недогрузку сечения. Момент сопротивления выбранного сечения

$$W_{\text{н}} = \frac{\pi d_{\text{н}}^3}{32}(1-\alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 14^3}{32}(1-0,5^4) = 253 \text{ см}^3.$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н}}} = \frac{40 \cdot 10^3}{253 \cdot 10^{-6}} = 158 \cdot 10^6 \text{ Па} = 158 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{160-158}{160} 100\% = 1,25\%,$$

что указывает на удовлетворительный выбор размеров сечения.

Задача 7. **Подобрать номер двутавровой балки (см. рис. 1.43), если заданы** $q = 10$ кН · м, $a = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа**.**

Ответ. Двутавр № 18.

Задача 8. **Подобрать номер двутавровой или составной из двух швеллеров балки по эпюре моментов (см. рис. 1.49), если задано** $[\sigma] = 100$ МПа**.**

Ответ. Двутавр № 10 с большой недогрузкой или два швеллера № 5.

Задача 9. **Подобрать номер двутавровой балки по эпюре моментов (см. рис. 1.52), если задано** $[\sigma] = 100$ МПа**.**

Ответ. Двутавр № 10.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ

При изгибе ось балки искривляется, оставаясь в плоскости нагрузки. В результате каждое сечение (центр тяжести) получает *вертикальное смещение* (*прогиб* y) и поворачивается на некоторый угол $\theta = \operatorname{arctg} y'$ (рис. 2.18). *Уравнение изогнутой оси* $y = y(x)$ определяет прогибы сечений в функции от их координат.

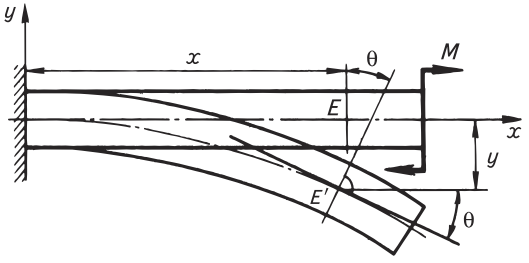


Рис. 2.18

Для малых деформаций ($\theta = y'$) дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$y'' = \frac{M}{EJ},$$

интегрируя которое получаем уравнение для углов поворота сечений

$$y' = \theta = \int_0^x \frac{M}{EJ}\mathrm{d}x + \theta_0$$

и уравнение изогнутой оси (прогибов)

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M}{EJ} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + \theta_0 x + y_0,$$

где y_0, θ_0 — прогиб и угол поворота сечения в начале координат.

Если при решении этого дифференциального уравнения:

1) рассматривать все участки балки в единой системе координат, помещая начало координат в крайнее левое либо правое сечение;

2) все распределенные нагрузки продлить до конца балки, вводя компенсирующие,

то, интегрируя его, получим универсальные уравнения для углов поворота сечений и изогнутой оси (прогибов) балки.

Универсальное уравнение углов поворота сечений

$$EJ\theta = EJy' = EJ\theta_0 \pm \sum \frac{M_0(x-a)^1}{1!} \pm \sum \frac{F(x-b)^2}{2!} \pm \sum \frac{q(x-c)^3}{3!}.$$

Универсальное уравнение прогибов или изогнутой оси

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x \pm \sum \frac{M_0(x-a)^2}{2!} \pm \sum \frac{F(x-b)^3}{3!} \pm \sum \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$

В этих уравнениях: E — модуль упругости первого рода; J — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси z (рис. 2.13), перпендикулярной плоскости нагрузки; a, b, c — расстояния от начала координат до нагрузки M_0, F, q соответственно (расстояние c берется до начала распределенной нагрузки).

Применение универсального уравнения позволяет значительно упростить решение, особенно для балок с несколькими участками.

Начальные параметры y_0 и θ_0 определяются из *граничных условий:*

а) для консольной балки угол поворота и прогиб сечения в заделке равны нулю;

б) для балки на двух опорах прогибы на этих опорах равны нулю.

Знак каждого члена в универсальном уравнении определяется *по правилу знаков для изгибающих моментов,* так как интегрируется уравнение $EJy'' = M$.

Расчеты на жесткость основываются на *условии жесткости* $y_{\max} \leqslant [y]$ и $\theta_{\max} \leqslant [\theta]$, где $[y]$, $[\theta]$ — допускаемые значения прогиба и угла поворота.

Построение *изогнутой оси балки* — построение графика прогибов. Для приближенного построения необходимо вычислить прогибы

в наиболее характерных точках. Через эти точки, используя граничные условия в закреплении, строят изогнутую ось балки.

Правила проверки правильности построения изогнутой оси балки основаны на связи изгибающего момента и кривизны балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ},$$

где ρ — радиус кривизны в сечении:

1) на участке, где изгибающий момент положителен, ось балки изогнута выпуклостью вниз;

2) на участке, где изгибающий момент отрицателен, ось балки изогнута выпуклостью вверх;

3) на участке, где $M = 0$, ось балки — прямая линия;

4) в сечении, где $M = 0$, у изогнутой оси балки — точка перегиба.

Для построения изогнутой оси балки с помощью универсального уравнения не требуется строить эпюры Q и M. Но для контроля правильности построения и развития навыков построения эпюр во всех задачах приводятся эпюры.

Задача 1. **Построить изогнутую ось балки, если заданы a, F, EJ. Определить прогиб и угол поворота сечения B (рис. 2.19).**

1. Начало координат целесообразно взять в заделке, где начальные параметры Q_0 (угол поворота в начале координат) и y_0 (прогиб в начале координат) равны нулю. В заделке действуют: реакция Y_A и момент заделки $M_з$. Для их определения составим уравнения равновесия:

$$\sum F_x = Y_A - F - F = 0, \qquad Y_A = F;$$

$$\sum M_A = -Fa + M_з = 0, \qquad M_з = Fa.$$

2. Для данной балки — один участок. Задаем произвольное сечение с координатой x, которая изменяется в пределах $0 \le x \le a$. В этом сечении поперечная сила $Q = Y_A = F$, изгибающий момент $M = -M_з + Y_A x = -Fa + Fx$. Строим эпюры Q и M.

3. Определение деформаций в данной задаче проведем через дифференциальное уравнение изогнутой оси: $EJy'' = M(x)$. Подставляя выражение для изгибающего момента и интегрируя, получим уравнение углов поворота

$$EJy' = EJ\theta = -Fax + F\frac{x^2}{2}.$$

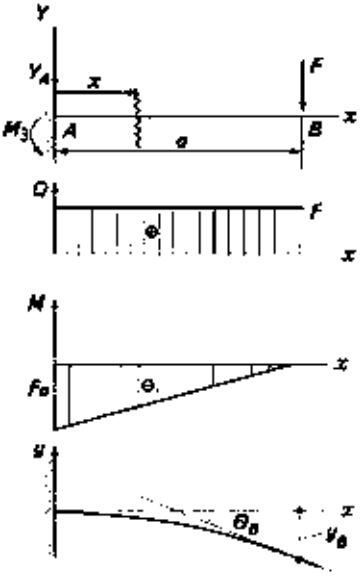


Рис. 2.19

Угол поворота сечения B $(x = a)$

$$\theta_B = -\frac{Fa^2}{2EJ}.$$

Интегрируя еще раз, получим уравнение изогнутой оси (прогибов)

$$EJy = -Fa\frac{x^2}{2} + F\frac{x^3}{6}.$$

Прогиб сечения B $(x = a)$

$$y_B = -\frac{Fa^3}{3EJ}.$$

4. Строим изогнутую ось балки. Используем то, что в заделке $y_A = 0$ и $\theta_A = 0$, в сечении B $y_B = -\dfrac{Fa^3}{3EJ}$; $\theta_B = -\dfrac{Fa^2}{2EJ}$ и так как эпюра моментов отрицательна, то ось балки изогнута выпуклостью вверх.

Задача 2. **Для двухопорной балки (рис. 2.20) определить углы поворота сечений A и B и построить изогнутую ось балки, если заданы l, M_0, EJ.**

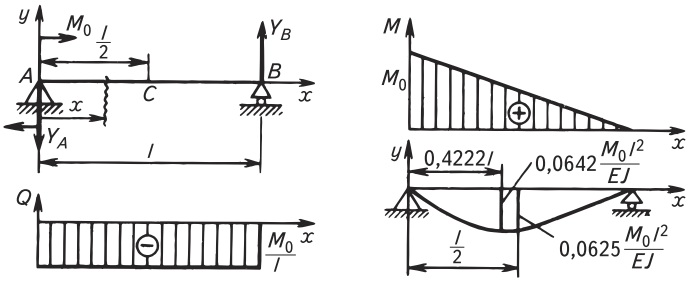


Рис. 2.20

1. Определяем реакции в опорах:

$$\sum F_y = -Y_A + Y_B = 0 \Rightarrow Y_A = Y_B;$$

$$\sum M_A = Y_A l - M_0 = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{M_0}{l}.$$

2. Имеем один участок. Начало координат выбираем в крайнем левом сечении балки.

3. Решение с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси.

Уравнение для изгибающего момента

$$M(x) = M_0 - Y_A x.$$

Дифференциальное уравнение

$$EJy'' = M_0 - Y_A x.$$

Интегрируя, получим уравнение углов поворота

$$EJ\theta = EJy' = M_0 x - Y_A \frac{x^2}{2} + EJ\theta_0$$

и уравнение прогибов

$$EJy = M_0 \frac{x^2}{2} - Y_A \frac{x^3}{6} + EJ\theta_0 x + EJy_0.$$

Если воспользоваться универсальными уравнениями, то получим те же уравнения для углов поворота и прогибов сечений:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \frac{M_0(x-0)^1}{1!} - \frac{Y_A(x-0)^2}{2!};$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M_0(x-0)^2}{2!} - \frac{Y_A(x-0)^3}{3!}.$$

Используем граничные условия — прогибы в опорах раны нулю:
при $x = 0$

$$EJy_{x=0} = EJy_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0;$$

при $x = l$

$$EJy_{x=l} = EJy_B = EJ\theta_0 l + \frac{M_0 l^2}{2} - \frac{M_0}{l}\frac{l^3}{6} = 0 \Rightarrow EJ\theta_0 = -\frac{M_0 l}{3}.$$

Следовательно, $\theta_A = \theta_0 = -\dfrac{M_0 l}{3EJ}$.

Окончательный вид уравнения для θ и y:

$$EJ\theta = EJy' = -\frac{M_0 l}{3} + M_0 x - \frac{M_0 x^2}{2l};$$

$$EJy = -\frac{M_0 l}{3}x + \frac{M_0 x^2}{2} - \frac{M_0 x^3}{6l}.$$

Определяем θ_B и y_C:
при $x = l$

$$EJ\theta_B = -\frac{M_0 l}{3} + M_0 l - \frac{M_0 l^2}{2l} = \frac{M_0 l}{6},$$

откуда

$$\theta_B = \frac{M_0 l}{6EJ};$$

при $x = \dfrac{l}{2}$

$$EJy_C = -\frac{M_0 l}{3}\frac{l}{2} + \frac{M_0\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{M_0\left(\dfrac{l}{2}\right)^3}{6l} = -\frac{M_0 l^2}{16},$$

откуда

$$y_C = -\frac{M_0 l^2}{16EJ} = -0{,}0625\frac{M_0 l}{EJ}.$$

Исследуем функцию $y = y(x)$ на экстремум:

$$\theta = y' = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{M_0 l}{3} + M_0 x - \frac{M_0 x^2}{2l}\right) = 0,$$

откуда

$$x^2 - 2lx + \frac{2}{3}l^2 = 0; \quad x_{1,2} = l \pm \sqrt{l^2 - \frac{2}{3}l^2} = l \pm \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Корни уравнения: $x_1 = l + \dfrac{l}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = l - \dfrac{l}{\sqrt{3}} = 0,422l$. Очевидно, первый корень не имеет физического смысла. Следовательно, максимальный прогиб булки будет при $x = 0,422l$:

$$EJy_{\max} = -\frac{M_0 l}{3}0,422l + \frac{M_0(0,422l)^2}{2} - \frac{M_0(0,422l)^3}{6l} = -0,0642M_0l^2,$$

откуда $y_{\max} = -0,0642\dfrac{M_0l^2}{EJ}$.

4. Строим изогнутую ось балки по найденным значениям прогибов и углов.

Задача 3. **Построить изогнутую ось балки, если заданы a, F, EJ. Определить прогибы сечений B и C (рис. 2.21).**

1. Целесообразно взять начало координат в заделке, где начальные параметры θ_0 и y_0 будут равны нулю. Поэтому сначала определяем реакции в заделке:

$$\sum F_y = Y_A - F + F = 0 \Rightarrow Y_A = 0;$$
$$\sum M_A = -M_з - Fa + F2a = 0 \Rightarrow M_з = Fa.$$

2. Число участков равно двум. Границы участков в единой системе координат:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$;

II участок: $a \leqslant x_2 \leqslant 2a$.

Записываем универсальное уравнение прогибов:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \left.\frac{M_з(x-0)^2}{2!}\right|_{\text{I}} - \left.\frac{F(x-a)^3}{3!}\right|_{\text{II}}.$$

Вертикальная черта с индексом номера участка ограничивает число членов уравнения для данного участка.

Используем граничные условия:
при $x = 0$ получим $\theta = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$;
при $x = 0$ получим $y = 0 \Rightarrow y_0 = 0$.

Подставляя значения y_0, θ_0, $M_з$ в универсальное уравнение, получим окончательный вид уравнения изогнутой оси:

$$EJy = \left.\frac{1}{2}Fax^2\right|_{\text{I}} - \left.\frac{1}{6}F(x-a)^3\right|_{\text{II}},$$

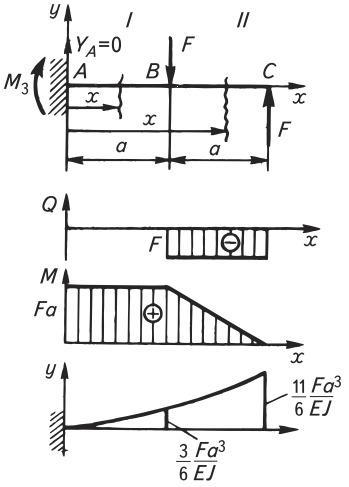


Рис. 2.21

т. е. для I участка уравнение прогиба имеет вид $EJy = \frac{1}{2}Fax^2$, для II участка — вид $EJy = \frac{1}{2}Fax^2 - \frac{1}{6}F(x-a)^3$.

Определяем искомые перемещения:

при $x = a$ (*I участок*)

$$EJy_B = EJy_{x=a} = \frac{1}{2}Fa^3 \Rightarrow y_B = \frac{Fa^3}{2EJ};$$

при $x = 2a$ (*II участок*)

$$EJy_C = EJy_{x=2a} = \frac{1}{2}Fa(2a)^2 - \frac{1}{6}F(2a-a)^3 = \frac{11}{6}Fa^3 \Rightarrow y_C = \frac{11Fa^3}{6EJ}.$$

4. Строим изогнутую ось балки. На всей длине балки изгибающий момент положительный, поэтому ось балки изогнута выпуклостью вниз.

Задача 4. **Для балки круглого сечения диаметром** $d = 5$ см **(рис. 2.22) определить углы поворота сечения** A **и** B **и прогиб сечения** C**, если заданы** $F = 10$ кН, $l = 1{,}5$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

1. Определяем реакции в опорах. Из симметрии следует, что $Y_A = Y_B = \frac{1}{2}F$.

2. Число участков равно двум. Начало координат выбираем в крайнем левом сечении балки.

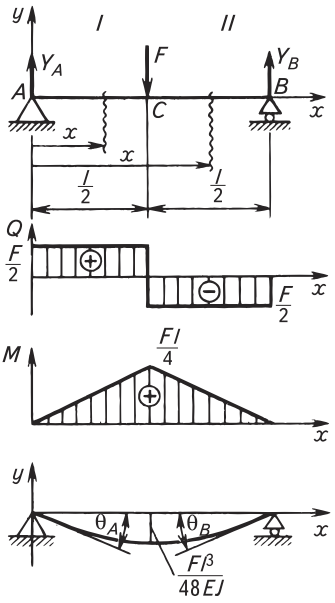


Рис. 2.22

Пределы изменения координат произвольных сечений:
I участок: $0 \leqslant x \leqslant l/2$;
II участок: $l/2 \leqslant x \leqslant l$.

3. Записываем уравнения для углов поворота сечений и прогибов:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \frac{Y_A(x-0)^2}{2!}\bigg|_{\text{I}} - \frac{F\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}{2!}\bigg|_{\text{II}};$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{Y_A(x-0)^3}{3!}\bigg|_{\text{I}} - \frac{F\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}{3!}\bigg|_{\text{II}}.$$

Используем граничные условия — прогибы на опорах равны нулю:

при $x = 0$ получим $y_{x=0} = y_A = 0 \Rightarrow y_0 = 0$;

при $x = l$ получим $y_{x=l} = y_B = 0 \Rightarrow 0 = EJ\theta_0 l + \dfrac{F}{2}\dfrac{l^3}{6} - \dfrac{F\left(l - \dfrac{l}{2}\right)^3}{6}$, откуда

$$EJ\theta_0 = -\frac{1}{16}Fl^2.$$

Следовательно, $\theta_A = \theta_0 = -Fl^2/(16EJ)$.

Окончательный вид уравнений для θ и y:

$$EJ\theta = -\frac{Fl^2}{16} + \frac{Fx^2}{4}\Bigg|_{\text{I}} - \frac{F\left(x - \dfrac{l}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_{\text{II}};$$

$$EJy = -\frac{Fl^3 x}{16} + \frac{Fx^3}{12}\Bigg|_{\text{I}} - \frac{F\left(x - \dfrac{l}{2}\right)^3}{6}\Bigg|_{\text{II}}.$$

Определяем θ_B и y_C в общем виде:

при $x = l$

$$EJ\theta_{x=l} = EJ\theta_B = -\frac{Fl^2}{16} + \frac{Fl^2}{4} - \frac{F\left(l - \dfrac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{Fl^2}{16} \Rightarrow \theta_B = \frac{Fl^2}{16EJ};$$

при $x = \dfrac{l}{2}$

$$EJy_{x=l/2} = EJy_C = -\frac{Fl^2}{16}\frac{l}{2} + \frac{F}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = -\frac{Fl^3}{48} \Rightarrow y_C = -\frac{Fl^3}{48EJ}.$$

Подставляем цифровые значения ($J = 0,05d^4$):

$$\theta_A = -\theta_B = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,5^2}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,05 \cdot 0,05^4} = -2,25 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = -1,29^\circ;$$

$$y_C = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,5^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,05 \cdot 0,05^4} = -1,125 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -11,25 \text{ мм}.$$

4. Строим изогнутую ось балки. Она симметрична и направлена выпуклостью вниз, так как изгибающие моменты положительны.

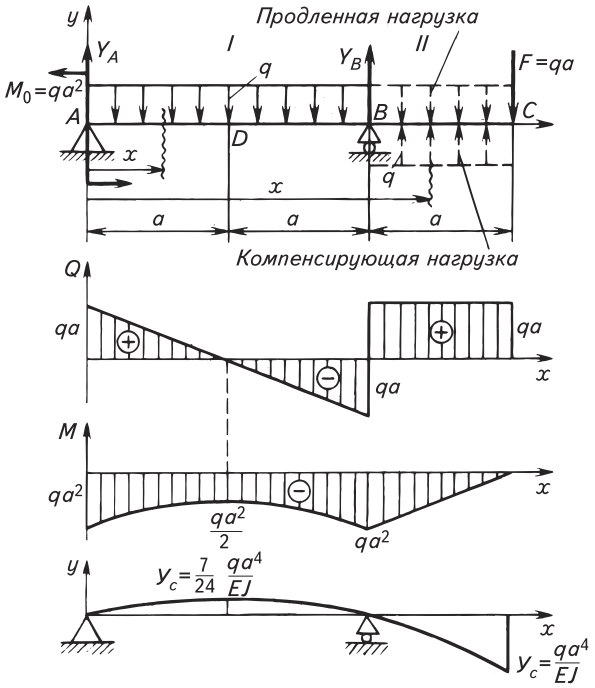


Рис. 2.23

Задача 5. **Для балки (рис. 2.23) определить прогибы в сечениях C и D и построить изогнутую ось, если заданы a, q, $F = qa$, $M_0 = qa^2$.**

1. Определяем реакции:

$$Y_A = qa; \quad Y_B = 2qa.$$

2. Строим эпюры Q и M. Окончательный вид эпюр приведен на рис. 2.22.

3. Начало координат выбираем в крайнем левом сечении — на опоре A, тогда один из начальных параметров, а именно y_0, будет равен нулю.

Имеем два участка. Границы участков в единой системе координат:

I участок: $0 \leqslant x \leqslant 2a$;

II участок: $2a \leqslant x \leqslant 3a$.

Для того чтобы воспользоваться универсальным уравнением при наличии прерывающейся распределенной нагрузки, эту нагрузку необходимо продлить до конца балки и ввести компенсирующую распределенную нагрузку той же интенсивности.

Продленная и компенсирующая нагрузки (показаны на рисунке штриховыми линиями) взаимно уничтожают друг друга и не изменяют нагрузку балки.

4. Записываем универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x - \frac{M_0(x-0)^2}{2!} + \frac{Y_A(x-0)^3}{3!} - \frac{q(x-0)^4}{4!}\Big|_{\text{I}} + \\ + \frac{Y_B(x-2a)^3}{3!} + \frac{q(x-2a)^4}{4!}\Big|_{\text{II}}.$$

Используем граничные условия для определения θ_0 и y_0:

при $x = 0$ получим $y_{x=0} = y_A = 0 \Rightarrow y_0 = 0$;
при $x = 2a$

$$y_{x=2a} = y_B = \frac{1}{EJ}\left[EJ\theta_0 2a - \frac{qa^2(2a)^2}{2} + \frac{qa^2(2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24}\right] = 0,$$

откуда

$$\theta_A = \theta_0 = \frac{2}{3}\frac{qa^3}{EJ}.$$

Окончательный вид универсального уравнения прогибов:

$$EJy = \frac{2}{3}qa^3x - \frac{qa^2}{2}x^2 + \frac{qa}{6}x^3 - \frac{q}{24}x^4\Big|_{\text{I}} + \frac{qa}{3}(x-2a)^3 + \frac{q}{24}(x-2a)^4\Big|_{\text{II}}.$$

Определяем искомые перемещения:
при $x = a$

$$EJy_D = \frac{2}{3}qa^3a - \frac{qa^2}{2}a^2 + \frac{qa}{6}a^3 - \frac{q}{24}a^4 = \frac{7}{24}qa^4,$$

откуда

$$y_D = \frac{7}{24}\frac{qa^4}{EJ};$$

при $x = 3a$

$$EJy_C = \frac{2}{3}qa^3(3a) - \frac{qa^2}{2}(3a)^2 + \frac{qa}{6}(3a)^3 - \frac{q}{24}(3a)^4 + \\ + \frac{qa}{3}(3a-2a)^3 + \frac{q}{24}(3a-2a)^4 = -qa^4,$$

откуда

$$y_C = -\frac{qa^4}{EJ}.$$

5. Строим приближенно изогнутую ось балки. Так как на всем протяжении балки изгибающий момент отрицательный, то изогнутая ось будет представлять кривую выпуклостью вверх по всей длине балки. Через четыре точки — y_A; y_D; y_B; y_C — проводим приближенно изогнутую ось выпуклостью вверх.

Задача 6. **Для балки (рис. 2.24) определить прогибы сечений и построить изогнутую ось балки, если заданы** F, a, $M_0 = 2Fa$, EJ.

1. Определяем реакции:

$$Y_A = \frac{5}{2}F; \quad Y_B = \frac{3}{2}F.$$

2. Строим эпюры Q и M.

3. Начало координат берем в точке C. Имеем три участка. Границы участков при единой системе координат:

I участок: $0 \leqslant x \leqslant a$;
II участок: $a \leqslant x \leqslant 3a$;
III участок: $3a \leqslant x \leqslant 4a$.

4. Записываем универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x - \left.\frac{F(x-0)^3}{3!}\right|_{\text{I}} + \left.\frac{Y_A(x-a)^3}{3!}\right|_{\text{II}} - \left.\frac{Y_B(x-3a)^3}{3!}\right|_{\text{III}}.$$

Используем граничные условия для определения начальных параметров θ_0 и y_0:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = a \\ y_{x=a} = y_A = 0 \Rightarrow 0 = EJy_0 + EJ\theta_0 a - \dfrac{Fa^3}{6}; \\ \text{при } x = 3a \\ y_{x=3a} = y_B = 0 \Rightarrow 0 = EJy_0 + EJ\theta_0 3a - \dfrac{F(3a)^3}{6} + \dfrac{5}{2}F\dfrac{(3a-a)^3}{6}. \end{array}\right\}$$

Решаем полученную систему уравнений. Вычитая из второго уравнения первое, имеем

$$EJ\theta_0 = \frac{1}{2}Fa^2.$$

Подставляя значение $EJ\theta_0$ в первое уравнение, получим

$$EJy_0 = -\frac{1}{3}Fa^3.$$

Следовательно,

$$\theta_C = \theta_0 = \frac{Fa^2}{2EJ}; \quad y_C = y_0 = -\frac{Fa^3}{3EJ}.$$

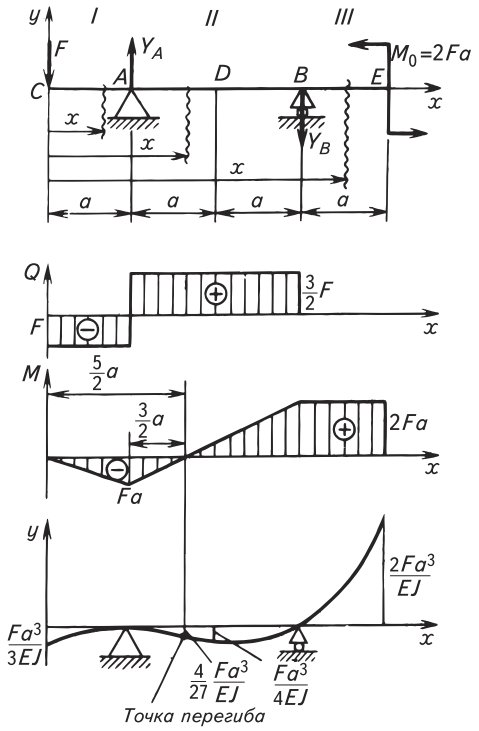


Рис. 2.24

Окончательный вид уравнения прогибов:

$$EJy = -\frac{1}{3}Fa^3 + \frac{1}{2}Fa^2x - \frac{1}{6}Fx^3\Big|_{\text{I}} + \frac{5}{12}F(x-a)^3\Big|_{\text{II}} - \frac{1}{4}F(x-3a)^3\Big|_{\text{III}}.$$

Определяем прогибы y_D и y_E:

при $x = 2a$

$$EJy_D = -\frac{1}{3}Fa^3 + \frac{1}{2}Fa^2(2a) - \frac{1}{6}F(2a)^3 + \frac{5}{12}F(2a-a)^3 = -\frac{1}{4}Fa^3,$$

откуда

$$y_D = -\frac{Fa^3}{4EJ};$$

при $x = 4a$

$$EJy_E = -\frac{1}{3}Fa^3 + \frac{1}{2}Fa^2(4a) - \frac{1}{6}F(4a)^3 +$$
$$+\frac{5}{12}F(4a-a)^3 - \frac{1}{4}F(4a-3a)^3 = 2Fa^3,$$

откуда

$$y_E = -\frac{2Fa^3}{EJ}.$$

Для более точного построения изогнутой оси балки целесообразно определить прогиб балки в том сечении, где $M = 0$ (в этом сечении на изогнутой оси балки будет точка перегиба).

Изгибающий момент на II участке

$$M = -Fx + Y_A(x-a) = \frac{3}{2}Fx - \frac{5}{2}Fa.$$

При $M = 0$ получим

$$\frac{3}{2}Fx^* - \frac{5}{2}Fa = 0 \Rightarrow x^* = \frac{5}{3}a.$$

Тогда при $x^* = \dfrac{5}{3}a$

$$EJy_{x=5a/3} = Fa^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2\cdot 3} - \frac{5^3}{6\cdot 3^3} + \frac{5\cdot 2^3}{12\cdot 3^3}\right) =$$
$$= -\frac{4Fa^3}{27} \Rightarrow y_{x=5a/3} = -\frac{4Fa^3}{27EJ}.$$

5. Строим изогнутую ось балки, используя соотношение между кривизной и моментом. На участке до $x = 5/3a$ изогнутая ось направлена выпуклостью вверх, так как момент отрицательный, на остальных участках изогнутая ось направлена выпуклостью вниз, так как момент положительный.

Задача 7. **Подобрать двутавровое сечение для балки (рис. 2.25) из условия жесткости, если заданы допускаемое значение максимального прогиба** $[y] = 1$ см; $q = 1$ кН/м; $l = 2$ м; $F = ql = 2$ кН; $M_0 = ql^2 = 4$ кН$\cdot$м, $E = 2\cdot 10^{11}$ Па.

1. Определяем реакции:

$$Y_A = \frac{5}{3}ql; \quad Y_B = \frac{2}{3}ql.$$

2. Строим эпюры Q и M.

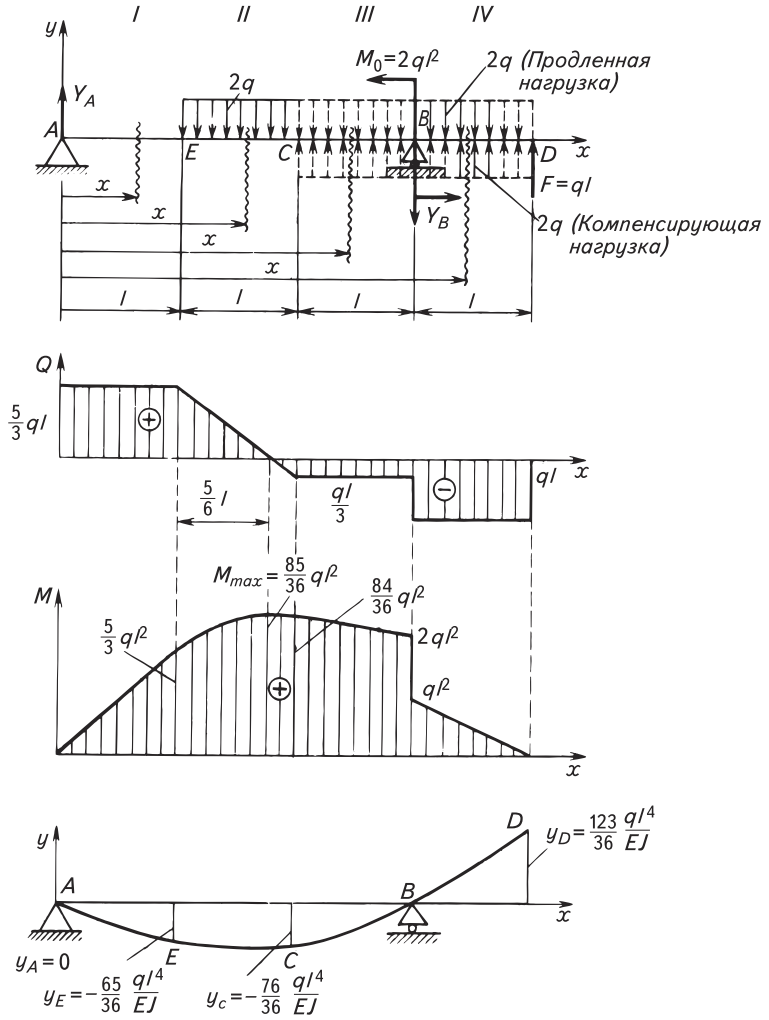


Рис. 2.25

3. Задаем начало единой системы координат в сечении A. Границы участков:

I участок: $0 \leqslant x \leqslant l$;
II участок: $l \leqslant x \leqslant 2l$;
III участок: $2l \leqslant x \leqslant 3l$;
IV участок: $3l \leqslant x \leqslant 4l$.

4. Записываем универсальное уравнение прогибов:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \left.\frac{Y_A(x-0)^3}{3!}\right|_{\text{I}} - \left.\frac{2q(x-l)^4}{4!}\right|_{\text{II}} + \left.\frac{2q(x-2l)^4}{4!}\right|_{\text{III}} - \left. - \frac{M_0(x-3l)^2}{2!} - \frac{Y_B(x-3l)^3}{3!}\right|_{\text{IV}}.$$

Для определения начальных параметров θ_0 и y_0 используем граничные условия, а именно прогибы на опорах A и B равны нулю:

$$y_{x=0} = y_A = 0; \quad y_{x=3a} = y_B = 0.$$

I участок: при $x = 0$ получим $EJy_A = EJy_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$;

III участок: при $x = 3a$ получим $EJy_B = EJy_{x=3a} = 0$, откуда

$$0 = EJ\theta_0 3l + \frac{5}{3}ql\frac{(3l)^3}{6} - \frac{2q(3l-l)^4}{24} + \frac{2q(3l-2l)^4}{24},$$

или

$$EJ\theta_0 3l + \frac{15}{2}ql^4 - \frac{4}{3}ql^4 + \frac{1}{12}ql^4 = 0;$$

$$EJ\theta_0 = -\frac{25}{12}ql^3.$$

Универсальное уравнение прогибов в окончательном виде таково:

$$EJy = -\frac{25}{12}ql^3x + \left.\frac{5}{18}qlx^3\right|_{\text{I}} - \left.\frac{1}{12}q(x-l)^4\right|_{\text{II}} + \left.\frac{1}{12}q(x-2l)^4\right|_{\text{III}} - \left. - \frac{1}{2}ql^2(x-3l)^2 - \frac{1}{9}ql(x-3l)^3\right|_{\text{IV}}.$$

5. Определяем прогибы y_E, y_C, y_D в общем виде:

I участок: при $x = l$

$$EJy_E = -\frac{25}{12}ql^3l + \frac{5}{18}qll^3 = -\frac{65}{36}ql^4 \Rightarrow y_E = -\frac{65}{36}\frac{ql^4}{EJ};$$

II участок: при $x = 2l$

$$EJy_C = -\frac{25}{12}ql^3 2l + \frac{5}{18}ql(2l)^3 - \frac{1}{12}(2l-l)^4 = -\frac{73}{36}ql^4 \Rightarrow y_C = -\frac{73}{36}\frac{ql^4}{EJ};$$

IV участок: при $x = 4l$

$$EJy_D = -\frac{25}{12}ql^3 4l + \frac{5}{18}ql(4l)^3 - \frac{1}{12}q(4l-l)^4 + \frac{1}{12}q(4l-2l)^4 -$$

$$-\frac{1}{2}ql^2(4l-3l)^2 - \frac{1}{9}ql(4l-3l)^3 = \frac{41}{12}ql^4 \Rightarrow y_D = \frac{41}{12}\frac{ql^4}{EJ} = \frac{123}{36}\frac{ql^4}{EJ}.$$

5. Строим изогнутую ось балки. Так как на всей длине балки изгибающий момент положителен, то изогнутая ось направлена выпуклостью вниз.

6. Определяем номер двутавра. Максимальный прогиб — в сечении D. Из неравенства жесткости $y_{\max} \leqslant [y]$ определяем требуемый момент инерции сечения балки:

$$J \geqslant \frac{41}{12}\frac{ql^4}{E[y]} = \frac{41 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{12 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01} = 0,273 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 2730 \text{ см}^4.$$

Неравенству удовлетворяет двутавр №22 с моментом инерции $J = 2790$ см^4 и моментом сопротивления $W = 254$ см^3 (см. Приложение 2). Проверим выбранный двутавр на прочность.

Максимальное напряжение в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{85ql^2}{36W} = \frac{85 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{36 \cdot 254 \cdot 10^{-6}} = 0,037 \cdot 10^9 \text{ Па} = 37 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение намного меньше допускаемого для стали $[\sigma] = 160$ МПа, поэтому номер двутавра, выбранный из условия жесткости, удовлетворяет и условию прочности.

Задача 8. **Консольная балка изгибается под нагрузкой по кривой $y = -a(x/l)^4$ (рис. 2.26). Определить нагрузку, действующую на балку, при условии, что прогибы невелики.**

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки при малых деформациях можно записать в следующем виде:

$$EJy'' = M(x).$$

Отсюда, дифференцируя уравнение изогнутой оси дважды, получим выражение для изгибающего момента, действующего на балку:

$$M(x) = -EJ\frac{a}{l^4}12x^2.$$

Используя дифференциальные зависимости, получим для поперечных сил

$$\theta(x) = \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = -EJ\frac{a}{l^4}24x$$

и для интенсивности распределенной нагрузки

$$q(x) = \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = 24EJ\frac{a}{l^4} = \text{const}.$$

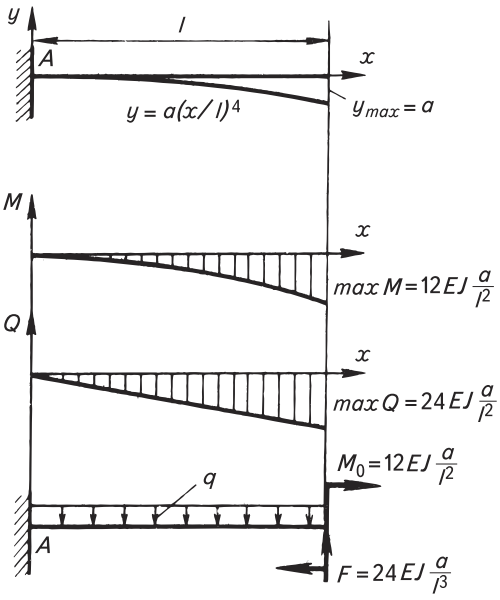


Рис. 2.26

По полученным выражениям строим эпюры Q и M. По эпюрам Q и M восстанавливаем нагрузку балки. Эпюра Q свидетельствует о наличии в крайнем сечении балки сосредоточенной силы $F = 24EJ\dfrac{a}{l^3}$, равной скачку на эпюре, эпюра M — о наличии сосредоточенного момента $M_0 = 12EJ\dfrac{a}{l^2}$, равного скачку на эпюре. Эти нагрузки совместно с распределенной и составляют искомую нагрузку.

Согласно эпюрам Q и M, в заделке реакция и момент равны нулю. Проверим это, составив уравнения равновесия:

$$\sum F_y = -ql + F = 0 \Rightarrow -24EJ\frac{a}{l^4}l + 24EJ\frac{a}{l^3} = 0;$$

$$\sum M_A = -\frac{1}{2}ql^2 + Fl - M_0 = 0 \Rightarrow -24EJ\frac{a}{l^4}\frac{l^2}{2} + $$

$$+ 24EJ\frac{a}{l^3}l - 12EJ\frac{a}{l^2} = 0.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются при отсутствии реакции и момента в заделке.

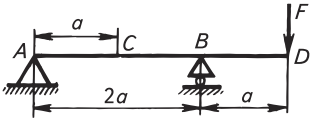


Рис. 2.27

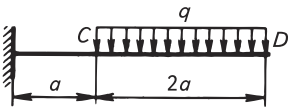


Рис. 2.28

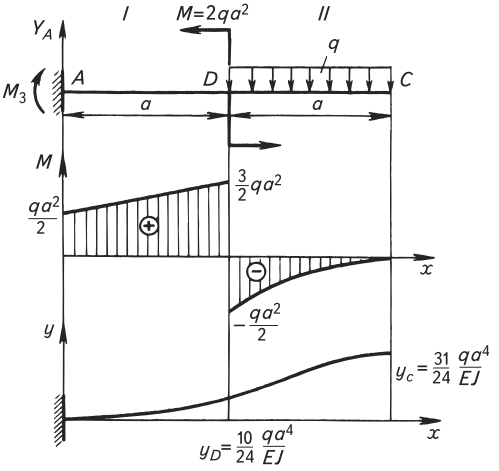


Рис. 2.29

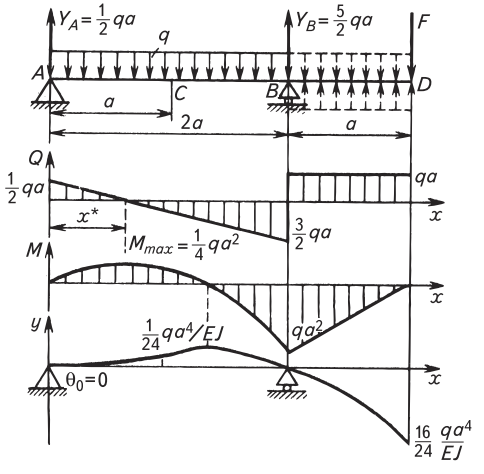


Рис. 2.30

Задача 9. **Определить прогибы балки (рис. 2.27) в сечениях C и D, если заданы a, F, EJ.**

Ответ. $y_C = Fa^3/(4EJ)$; $y_D = -Fa^3/(EJ)$.

Задача 10. **Определить прогибы балки (рис. 2.28) в сечениях C и D, если заданы a, q, EJ.**

Ответ. $y_C = -5qa^4/(3EJ)$; $y_D = -29qa^4/(3EJ)$.

Задача 11. **Построить изогнутую ось балки (рис. 2.29), если заданы a, q, $M_0 = 2qa^2$, EJ.**

Задача 12. **Построить изогнутую ось балки (рис. 2.30), если заданы a, q, $F = qa$, EJ.**

ГЛАВА 3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ МОРА

Метод Мора — универсальный способ для определения линейных и угловых перемещений в любых плоских и пространственных системах, состоящих из шарнирно или жестко соединенных прямых или кривых брусьев. Наибольшее применение метод Мора нашел для балок и рам, испытывающих деформацию изгиба. Цель — определение линейных и угловых перемещений конкретных сечений.

Порядок определения перемещений. К балке (раме), освобожденной от внешних нагрузок, к сечению, перемещение которого определяется, прикладывается единичная сила, если определяется линейное перемещение, или единичный момент, если определяется угловое перемещение, в направлении искомого перемещения.

Заданная балка (рама) с внешними нагрузками и балка (рама) с единичной нагрузкой разбиваются на одинаковые участки и на каждом из них одинаковым образом задается координата произвольного сечения.

Составляются уравнения для изгибающего момента M по участкам в заданной балке (раме) и M_1 в балке (раме) с единичной нагрузкой. Искомое линейное угловое перемещение δ определяется с помощью интегралов Мора:

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{MM_1}{EJ} \mathrm{d}x_i.$$

Интегрирование проводится по длине каждого участка, суммирование — по всем участкам.

При применении метода Мора положительное значение искомого перемещения получается в том случае, если его направление совпадает с направлением приложенной единичной силы (единичного момента). Знак минус указывает на то, что искомое перемещение направлено против действия этой единичной силы (единичного момента).

Примем в дальнейшем такие обозначения деформаций:

$\delta_A^{\text{в}}$ — вертикальное перемещение точки A;

$\delta_A^{\text{г}}$ — горизонтальное перемещение точки A;

θ_A — угол поворота сечения A.

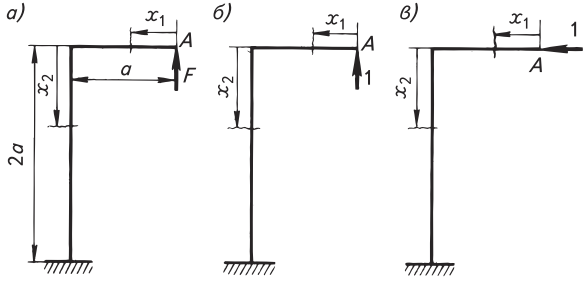


Рис. 3.1

Задача 1. **Для рамы (рис. 3.1, *а*), нагруженной силой F, определить перемещение сечения A, если заданы a, F, EJ.**

1. Для определения вертикального перемещения сечения A к раме, свободной от внешних нагрузок, прикладываем в сечении A вертикальную единичную силу (рис. 3.1, *б*) (направление — произвольное).

2. Разбиваем раму на два участка, задаем произвольные сечения одинаково в основной системе и в системе с единичной силой.

Составляем уравнения для изгибающих моментов от внешней нагрузки — силы F — и от единичной силы:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = Fx_1$; $M_1^{\text{в}} = 1 \cdot x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $M = Fa$; $M_1^{\text{в}} = 1 \cdot a$.

3. Подставляем полученные выражения в интегралы Мора и определяем вертикальное перемещение сечения A:

$$\delta_A^{\text{в}} = \int_0^a \frac{Fx_1^2 \mathrm{d}x_1}{EJ} + \int_0^{2a} \frac{Fa^2 \mathrm{d}x_2}{EJ} = \frac{Fa^3}{3EJ} + \frac{2Fa^3}{EJ} = \frac{7}{3}\frac{Fa^3}{EJ}.$$

Знак плюс говорит о том, что перемещение сечения A совпадает с направлением единичной силы.

4. Для определения горизонтального перемещения сечения A к раме, свободной от внешних нагрузок, прикладываем в этом сечении горизонтальную единичную силу (рис. 3.1, *в*) (направление произвольное).

5. Составляем выражения для изгибающих моментов:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = Fx_1$; $M_1^{\text{г}} = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $M = Fa$; $M_1^{\text{г}} = 1 \cdot x_2$.

6. Определяем горизонтальное перемещение сечения A:

$$\delta_A^{\text{г}} = \int_0^{2a} \frac{Fax_2 \mathrm{d}x_2}{EJ} = \frac{2Fa^3}{EJ}.$$

7. Определяем перемещение сечения A:

$$\delta_A = \sqrt{(\delta_A^{\text{в}})^2 + (\delta_A^{\text{г}})^2} = 3,07\frac{Fa^3}{EJ}.$$

Направление перемещения

$$\beta = \operatorname{arctg}(\delta_A^{\text{в}}/\delta_A^{\text{г}}) = \operatorname{arctg}(7/6) = 49,4^\circ.$$

Задача 2. **Для рамы (рис. 3.2, *а*), нагруженной силой F, определить горизонтальное перемещение и угол поворота сечения в опоре B, если заданы a, F, EJ.**

Для определения перемещений $\delta_B^{\text{г}}$ и θ_B освобождаем заданную систему от нагрузок и прикладываем в точке B единичную силу (рис. 3.2, *б*) и единичный момент (рис. 3.2, *в*).

Для получения уравнений изгибающего момента M от заданных внешних нагрузок, изгибающего момента $M_1^{\text{г}}$ от единичной горизонтальной силы, приложенной в точке B, и изгибающего момента M_1^{θ} от единичного момента, приложенного в точке B, необходимо предварительно определить реакции на опорах A и B.

1. Определяем опорные реакции в трех системах, изображенных на рисунках.

Первая система (рис. 3.2, *а*):

$$\sum F_x = F - X_A = 0 \Rightarrow X_A = F;$$
$$\sum M_A = -F2a + Y_B a = 0 \Rightarrow Y_B = 2F;$$
$$\sum M_B = -F2a + Y_A a = 0 \Rightarrow Y_A = 2F.$$

Вторая система (рис. 3.2, *б*):

$$\sum F_x = 1 - X'_A = 0 \Rightarrow X'_A = 1.$$

Третья система (рис. 3.2, *в*):

$$\sum M_A = 1 - Y''_B a = 0 \Rightarrow Y''_B = 1/a;$$
$$\sum M_B = -Y''_A a = 0 \Rightarrow Y''_A = 1/a.$$

2. Разбиваем каждую раму на три участка и задаем координаты сечений во всех трех рамах одинаково.

Границы участков:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$;
III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 2a$.

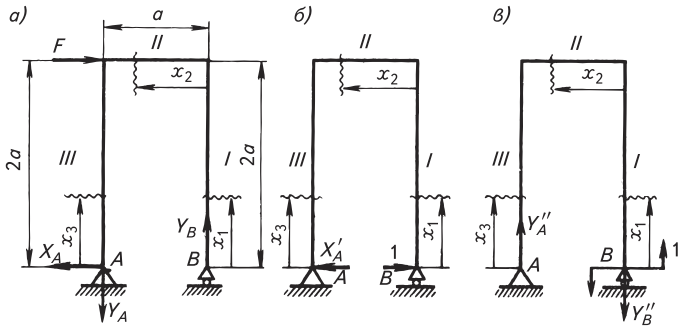


Рис. 3.2

3. Записываем уравнения изгибающего момента по участкам для трех систем:

I участок: $M = 0$; $M_1^{\text{г}} = 1 \cdot x_1$; $M_1^{\theta} = 1$;

II участок: $M = Y_B x_2 = 2Fx_2$; $M_1^{\text{г}} = 1{\cdot}2a$; $M_1^{\theta} = 1 - Y_B'' x_2 = 1 - \dfrac{1}{a}x_2$;

III участок: $M = X_A x_3 = Fx_3$; $M_1^{\text{г}} = 1 \cdot x_3$; $M_1^{\theta} = 0$.

4. Определяем искомые перемещения:

$$EJ\delta_B^{\text{г}} = \int_0^a 2Fx_2 2a\,\mathrm{d}x_2 + \int_0^{2a} Fx_3 x_3\,\mathrm{d}x_3 = 4Fa\frac{a^2}{2} + F\frac{(2a)^3}{3} = \frac{14}{3}Fa^3,$$

откуда

$$\delta_B^{\text{г}} = \frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EJ};$$

$$EJ\theta_B = \int_0^a 2Fx_2\left(1 - \frac{1}{a}x_2\right)\mathrm{d}x_2 = 2F\frac{a^2}{2} - \frac{2F}{a}\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}Fa^2,$$

откуда

$$\theta_B = \frac{1}{3}\frac{Fa^2}{EJ}.$$

Положительные значения перемещений говорят о том, что направления перемещений $\delta_B^{\text{г}}$ и θ_B совпадают с направлениями приложенных единичной силы и единичного момента.

Задача 3. **Определить прогиб и угол поворота сечения B для консольной балки (рис. 3.3, *а*), если заданы q, a, EJ, $M_0 = qa^2$.**

1. К балке, свободной от внешних нагрузок, в сечении B прикладываем единичную силу (рис. 3.3, *б*) и единичный момент (рис. 3.3, *в*).

2. Аналитические выражения для изгибающего момента можно составить, рассматривая нагрузки от свободного конца балки налево. Поэтому можно не определять реакции в заделке.

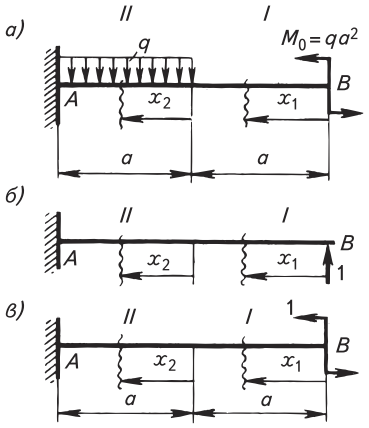


Рис. 3.3

3. Разбиваем балку на два участка и записываем уравнения для изгибающих моментов:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = M_0 = qa^2$; $M_1^{\text{в}} = 1 \cdot x_1$; $M_1^{\theta} = 1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = qa^2 - \dfrac{1}{2}qx_2^2$; $M_1^{\text{в}} = 1(a + x_2)$; $M_1^{\theta} = 1$.

4. Определяем прогиб в сечении B:

$$EJ\delta_B^{\text{в}} = EJy_B = \int_0^a qa^2 x_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left(qa^2 - q\frac{x_2^2}{2}\right)(a + x_2)\mathrm{d}x_2 =$$

$$= qa^2 \left.\frac{x_1^2}{2}\right|_0^a + qa^3 \left.x_2\right|_0^a + qa^2 \left.\frac{x_2^2}{2}\right|_0^a - q\frac{a}{2}\left.\frac{x_2^3}{3}\right|_0^a - \frac{q}{2}\left.\frac{x_2^4}{4}\right|_0^a =$$

$$= qa^4\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{41}{24}qa^4,$$

откуда

$$y_B = \frac{41qa^4}{24EJ}.$$

5. Определяем угол поворота в сечении B:

$$EJ\theta_B = \int_0^a qa^2 1\mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left(qa^2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)1\mathrm{d}x_2 = qa^3\left(1 + 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{6}qa^3,$$

откуда

$$\theta_B = \frac{11}{6}\frac{qa^3}{EJ}.$$

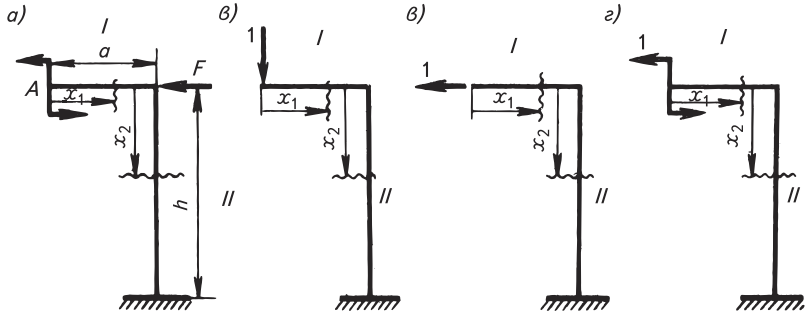


Рис. 3.4

Задача 4. **Определить перемещения сечения** A **в раме (рис. 3.4,** *а***), если заданы** $F = 20$ кН, $M = 10$ кН · м, $a = 2$ м, $h = 4$ м, $J = 10^4$ см^4, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

1. Для определения вертикального $\delta_A^{\text{в}}$, горизонтального $\delta_A^{\text{г}}$ и углового θ_A перемещений сечения A к раме, свободной от внешних нагрузок, прикладываем вертикальную (рис. 3.4, *б*) и горизонтальную (рис. 3.4, *в*) единичные силы и единичный момент (рис. 3.4, *г*).

2. Записываем по участкам выражения для изгибающих моментов:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = -M_0$; $M_1^{\text{в}} = -1 \cdot x_1$;
$M_1^{\text{г}} = 0$; $M_1^{\theta} = -1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant h$; $M = -M_0 - Fx_2$; $M_1^{\text{в}} = -1 \cdot a$;
$M_1^{\text{г}} = -1 \cdot x_2$; $M_1^{\theta} = -1$.

3. Определяем перемещения:
вертикальное

$$EJ\delta_A^{\text{в}} = \int_0^a M_0 x_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^h (M_0 + Fx_2) a \mathrm{d}x_2 = \frac{M_0 a^2}{2} + M_0 ah + \frac{Fah^2}{2},$$

откуда

$$\delta_A^{\text{в}} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{M_0 a^2}{2} + M_0 ah + \frac{Fah^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}}\left(\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{2} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4}{1} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4^2}{2}\right) = 0{,}021\,\text{м};$$

горизонтальное

$$EJ\delta_A^2 = \int_0^h (M_0 + Fx_2) x_2 \mathrm{d}x_2 = \frac{M_0 h^2}{2} + \frac{Fh^3}{3},$$

откуда

$$\delta_A^2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{M_0 h^2}{2} + \frac{Fh^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 10^{11}\cdot 10^4\cdot 10^{-8}}\left(\frac{10\cdot 10^3\cdot 4^2}{2} + \frac{20\cdot 10^3\cdot 4^3}{3}\right) = 0{,}0253 \text{ м};$$

угловое

$$EJ\theta_A = \int_0^a M_0 \mathrm{d}x_1 + \int_0^h (M_0 + Fx_2)\mathrm{d}x_2 = M_0 a + M_0 h + \frac{Fh^2}{2},$$

откуда

$$\theta_A = \frac{1}{EJ}\left[M_0(a+h) + \frac{Fh^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 10^{11}\cdot 10^4\cdot 10^{-8}}\left[10\cdot 10^3\cdot(2+4) + \frac{20\cdot 10^3\cdot 4^2}{2}\right] = 0{,}011 \text{ рад}.$$

Задача 5. **Определить вертикальное и горизонтальное перемещения сечения A в раме (рис. 3.5, *а*), если заданы a, F, $M_0 = Fa$, EJ.**

1. Создаем две дополнительные системы с единичными силами (рис. 3.5, *б, в*). Разбиваем все системы одинаково на участки.

2. Записываем уравнения изгибающих моментов по участкам во всех трех системах (направление обхода контура рамы показано на рисунках стрелкой):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{3}{2}a$; $M = Fa$; $M_1^{\text{в}} = 0$; $M_1^2 = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = 0$; $M_1^{\text{в}} = -1\cdot x_2$; $M_1^2 = 0$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $M = Fa$; $M_1^{\text{в}} = 1\cdot a$; $M_1^2 = -1\cdot x_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $M = Fa - Fx_4$; $M_1^{\text{в}} = 1\cdot a$; $M_1^2 = -1(a + x_4)$.

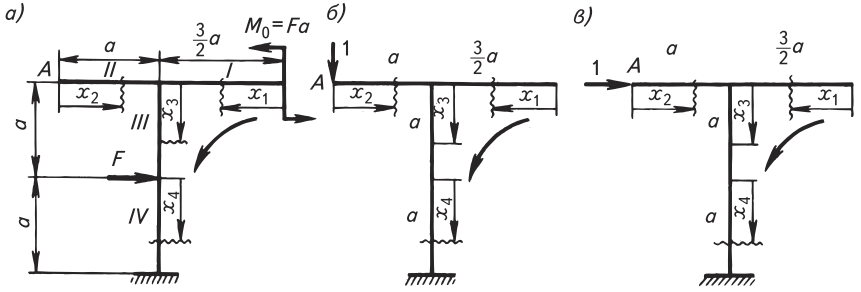


Рис. 3.5

3. Определяем перемещения сечения:

вертикальное

$$EJ\delta_A^{\text{в}} = \int_0^a Faa\mathrm{d}x_3 + \int_0^a (Fa - Fx_4)a\mathrm{d}x_4 = Fa^3\left(1+1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Fa^3,$$

откуда

$$\delta_A^{\text{в}} = \frac{3}{2} = \frac{Fa^3}{EJ};$$

горизонтальное

$$EJ\delta_A^2 = -\int_0^a Fax_3\mathrm{d}x_3 - \int_0^a (Fa - Fx_4)(a + x_4)\mathrm{d}x_4 =$$

$$= Fa^3\left(-\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{6}Fa^3,$$

откуда

$$\delta_A^2 = -\frac{7}{6}\frac{Fa^3}{EJ}.$$

Знак минус говорит о том, что направление перемещения будет противоположно направлению приложенной горизонтальной силы, т. е. точка A будет перемещаться влево.

Задача 6. **Для рамы на двух опорах (рис. 3.6, *а*) определить перемещение опоры B, если заданы a, q, $M_0 = qa^2$, EJ.**

1. Создаем дополнительную систему (рис. 3.6, *б*). Раму, свободную от внешних нагрузок, нагружаем горизонтальной единичной силой, так как опора B может перемещаться только в горизонтальном направлении.

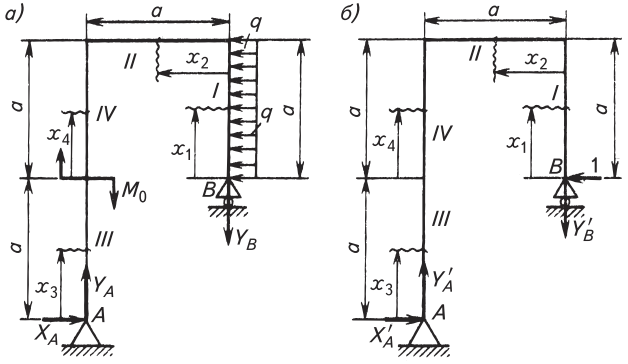


Рис. 3.6

2. Определяем реакции опор в основной и дополнительной системах. Окончательные значения реакций:

в основной системе $X_A = qa$; $Y_A = \frac{1}{2}qa$; $Y_B = \frac{1}{2}qa$;

в дополнительной системе $X'_A = 1$; $Y'_A = 1$; $X'_A = 1$.

3. Одинаково разбиваем обе системы на участки и составляем выражения для изгибающих моментов:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = -\frac{1}{2}qx_1^2$; $M_1^2 = -1 \cdot x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = -\frac{1}{2}qa^2 - \frac{1}{2}qax_2$; $M_1^2 = -1 \cdot a - 1 \cdot x_2$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $M = -qax_3$; $M_1^2 = -1 \cdot x_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $M = -qa(a + x_4) + qa^2 = -qax_4$;
$M_1^2 = -1(a + x_4)$.

4. Определяем горизонтальное перемещение опоры B:

$$EJ\delta_B^2 = \int_0^a qx_1^2 \cdot x_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left(\frac{1}{2}qa^2 + \frac{1}{2}qax_2\right)(a + x_2)\mathrm{d}x_2 +$$
$$+ \int_0^a qax_3x_3\mathrm{d}x_3 + \int_0^a qax_4(a + x_4)\mathrm{d}x_4 =$$
$$= qa^4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{59}{24}qa^4,$$

откуда

$$\delta_B^2 = -\frac{59}{24}\frac{qa^4}{EJ}.$$

Опора B переместится в направлении единичной силы, т. е. влево, так как решение получилось со знаком плюс.

Задача 7. **Определить вертикальное перемещение и угол поворота сечения C в раме (рис. 3.7, *а*), если заданы a, F, EJ.**

1. Рисуем две дополнительные системы с единичной силой и единичным моментом (рис. 3.7, *б, в*).

2. Во всех системах определяем реакции:

в раме, нагруженной внешней силой (рис. 3.7, *а*), $Y_A = F$, $Y_B = 0$;

в раме, нагруженной единичной силой (рис. 3.7, *б*), $Y'_A = 1$, $Y'_B = 0$;

в раме, нагруженной единичным моментом (рис. 3.7, *в*),
$Y'_A = 1/(3a)$, $Y'_B = 1/(3a)$.

3. Составляем уравнения для изгибающих моментов по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $M = -Fx_1$; $M_1^{\text{в}} = -1 \cdot x_1$; $M_1^{\theta} = -1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = -F2a$; $M_1^{\text{в}} = -1 \cdot 2a$; $M_1^{\theta} = -1$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 2a$; $M = Fx_3$; $M_1^{\text{в}} = 1 \cdot x_3$; $M_1^{\theta} = \frac{1}{3a}x_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $M = 0$; $M_1^{\text{в}} = 0$; $M_1^{\theta} = -\frac{1}{3a}x_4$.

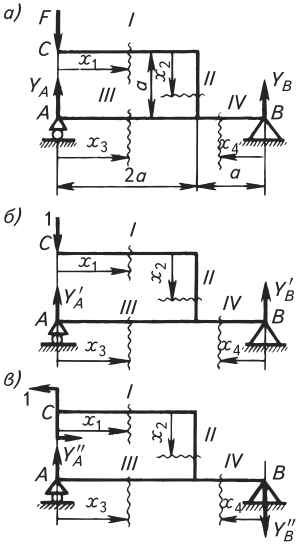


Рис. 3.7

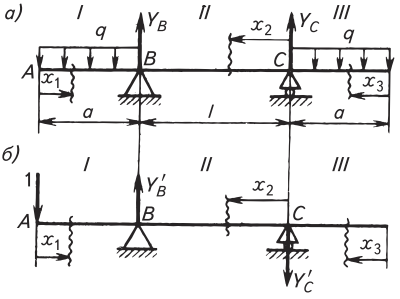


Рис. 3.8

4. Определяем перемещения:

вертикальное

$$EJ\delta_C^{\text{в}} = \int_0^{2a} Fx_1 x_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^{a} 2Fa2a\mathrm{d}x_2 + \int_0^{2a} Fx_3 x_3 \mathrm{d}x_3 =$$

$$= Fa^3\left(\frac{8}{3} + 4 + \frac{8}{3}\right) = \frac{28}{3}Fa^3,$$

откуда

$$\delta_C^{\text{в}} = \frac{28}{3}\frac{Fa^3}{EJ};$$

угловое

$$EJ\theta_C = \int_0^{2a} Fx_1 1\mathrm{d}x_1 + \int_0^{a} 2Fa1\mathrm{d}x_2 + \int_0^{2a} Fx_3 \frac{1}{3a} x_3 \mathrm{d}x_3 =$$

$$= Fa^2\left(2 + 2 + \frac{8}{9}\right) = \frac{44}{9}Fa^2,$$

откуда

$$\theta_C = \frac{44}{9}\frac{Fa^2}{EJ}.$$

Задача 8. **Определить вертикальное перемещение сечения A (прогиб) в балке (рис. 3.8, *а*), если заданы a, q, EJ.**

1. Рисуем балку, свободную от внешних нагрузок, и в сечении A прикладываем вертикальную единичную силу (рис. 3.8, *б*).

2. Определяем реакции в обеих балках, составляя уравнения равновесия:

в балке, нагруженной внешними нагрузками,

$$\sum F_y = Y_C + Y_B - 2qa = 0;$$
$$\sum M_B = \frac{1}{2}qa^2 - qa\left(\frac{a}{2} + l\right) + Y_C l = 0 \Rightarrow Y_C = Y_B = qa;$$

в балке, нагруженной единичной силой,

$$\sum F_y = Y'_B - 1 - Y'_C = 0;$$
$$\sum M_B = 1 \cdot a - Y_C l = 0 \Rightarrow Y'_C = \frac{a}{l}; \quad Y'_B = 1 + \frac{a}{l}.$$

3. Составляем уравнения для изгибающих моментов в обеих балках по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = -\frac{1}{2}qx_1^2$; $M_1 = -x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant l$; $M = -qa\left(\frac{a}{2} + x_2\right) + qax_2 = -\frac{1}{2}qa^2$;

$$M_1 = -\frac{a}{l}x_2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $M = -\frac{1}{2}qx_3^2$; $M_1 = 0$.

4. Подставляем уравнения в интегралы Мора и вычисляем прогиб:

$$EJ\delta_A^{\text{в}} = EJy_A = \int_0^a \frac{qx_1^3}{2}\mathrm{d}x_1 + \int_0^l \frac{qa^2}{2}\frac{a}{l}x_2\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{4}qa^3\left(l + \frac{a}{2}\right).$$

Задача 9. **В раме (рис. 3.9) определить горизонтальное перемещение сечения A и угловое перемещение сечения B с помощью интегралов Мора, если заданы $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН, $a = 2$ м, $J = 3000$ см^4, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.**

Ответ. $\delta_A^2 = \dfrac{(14F_1 + 3F_2)a^3}{6EJ} = 4{,}5$ см; $\theta_B = \dfrac{(2F_1 + F_2)a^2}{2EJ} = 0{,}0133$ рад; сечение A смещается влево, сечение B поворачивается по часовой стрелке.

Задача 10. **В раме (рис. 3.10) определить горизонтальное перемещение шарнирной опоры B, если заданы a, F, EJ.**

Ответ. Опора B смещается влево на величину $\delta_B^2 = \dfrac{5Fa^3}{6EJ}$.

Задача 11. **В раме (рис. 3.11) определить горизонтальное, вертикальное и угловое перемещения сечения B, если**

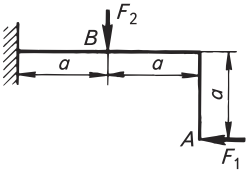


Рис. 3.9

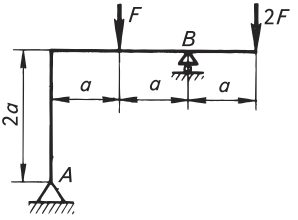


Рис. 3.10

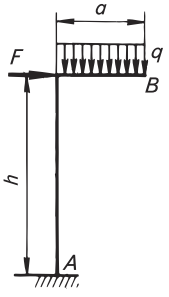


Рис. 3.11

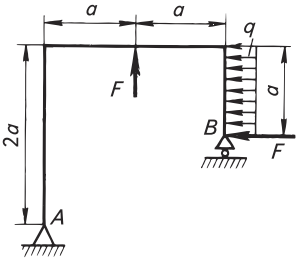


Рис. 3.12

заданы $F = 20$ кН, $q = 10$ кН/м, $a = 1$ м, $h = 3$ м, $J = 4000$ см^4, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

Ответ.

$$\delta_B^{\text{в}} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qa^4}{8} + \frac{qa^3h}{2} + \frac{Fah^2}{2}\right) = 1{,}33 \text{ см};$$

$$\delta_B^2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qa^2h^2}{4} + \frac{Fh^3}{3}\right) = 2{,}53 \text{ см};$$

$$\theta_B = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qa^3}{6} + \frac{qa^2h}{2} + \frac{Fh^2}{2}\right) = 0{,}0133 \text{ рад};$$

сечение B смещается вниз и вправо и поворачивается по часовой стрелке.

Задача 12. **В раме (рис. 3.12) определить горизонтальное перемещение шарнирной опоры** B**, если заданы** a**,** q**,** $F = qa$**,** EJ**.**

Ответ. $\delta_B^2 = \dfrac{365}{24}\dfrac{qa^4}{EJ}$; смещение влево.

ГЛАВА 4

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Статически неопределимой называется система, в которой число неизвестных реакций больше числа уравнений равновесия. *Степень статической неопределимости* определяется разностью между числом реакций и числом уравнений равновесия.

Решение всех статически неопределимых задач основано на добавлении к уравнениям равновесия недостающего числа уравнений упругих деформаций.

Решение статически неопределимых задач начинается с отбрасывания «лишних» связей до образования статически определимой системы, которая называется *основной системой*, причем в каждой задаче за «лишние» можно принимать любые из реакций и, следовательно, заданную систему можно свести к различным основным системам. Основная система должна быть *кинематически неизменяема*, т. е. не должна иметь возможность перемещаться под нагрузкой.

К основной системе добавляем неизвестные реактивные силы и моменты и уравнения деформаций, накладываемые отброшенными связями. В результате получаем эквивалентную систему. Основная система, эквивалентная заданной статически неопределимой системе (при наличии уравнений деформаций, накладываемых связями), носит название *эквивалентной системы.*

Далее решение статически неопределимой системы сводится к решению статически определимой эквивалентной системы.

4.1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ НА РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Задача 1. **Раскрыть статическую неопределимость (определить реакции) для бруса (рис. 4.1, *а*), если заданы** $F = 10$ кН, $a = 1$ м, $A = 20$ см^2, $\delta = 0{,}4$ мм, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**. Построить эпюру напряжений. (При приложении нагрузки стержень, удлиняясь, упирается в нижнюю опору, возникают две реакции.)**

1. Определяем степень статической неопределенности системы. Система один раз статически неопределима: неизвестных реакций — две (R_1 и R_2), а уравнение равновесия — одно ($\sum F_y = 0$).

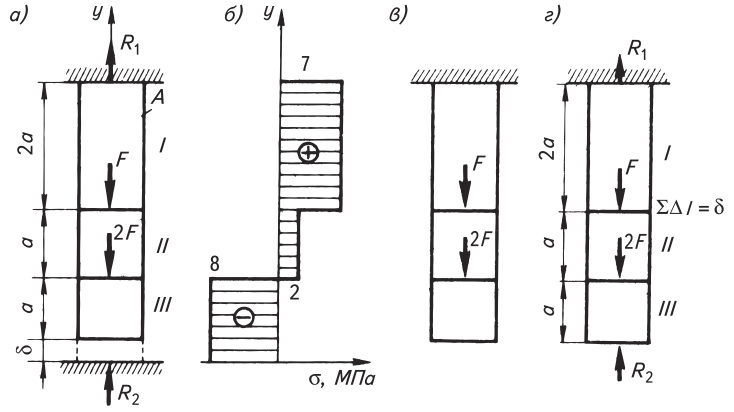


Рис. 4.1

2. Выбираем основную систему, отбрасывая нижнее закрепление (рис. 4.1, *в*).

3. Изображаем эквивалентную систему (рис. 4.1, *г*).

4. Составляем уравнение равновесия и уравнение деформаций (перемещений) и решаем их совместно.

а) Уравнение равновесия

$$\sum F_y = R_1 - F - 2F + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 3F - R_1.$$

б) Содержание уравнения перемещений заключается в том, что суммарная продольная деформация всех участков бруса равна зазору δ, т. е.

$$\Delta l_\Sigma = \Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}} + \Delta l_{\mathrm{III}} = \delta.$$

Для стержня с двумя заделками $\delta = 0$ и уравнение деформации

$$\Delta l_\Sigma = 0.$$

Записываем выражения для продольной силы и удлинения каждого участка в отдельности:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant 2a$; $N = R_1$; $\Delta l_{\mathrm{I}} = \dfrac{R_1 \cdot 2a}{EA}$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $N = R_1 - F$; $\Delta l_{\mathrm{II}} = \dfrac{(R_1 - F)a}{EA}$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $N = -R_2$; $\Delta l_{\mathrm{III}} = -\dfrac{R_2 a}{EA}$.

Тогда уравнение перемещений примет вид

$$\frac{R_1 2a}{EA} + \frac{(R_1 - F)a}{EA} - \frac{R_2 a}{EA} = \delta.$$

Подставив значение R_2 из уравнения равновесия и приведя к общему знаменателю, получим

$$2R_1 + (R_1 - F) - (3F - R_1) = \frac{\delta}{a} EA,$$

или

$$4R_1 - 4F = \frac{\delta}{a} EA,$$

откуда

$$R_1 = F + \frac{\delta}{4a} EA = 10 \cdot 10^3 + \frac{0{,}4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 14 \text{ кН};$$

$$R_2 = 3F - R_1 = 3 \cdot 10 \cdot 10^3 - 14 \cdot 10^3 = 16 \text{ кН}.$$

Таким образом, статическая неопределимость системы раскрыта (определена реакция лишней связи R_2).

5. Определяем напряжения во всех трех участках бруса:

I участок: $\sigma = \dfrac{R_1}{A} = \dfrac{14 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 7$ МПа;

II участок: $\sigma = \dfrac{R_1 - F}{A} = \dfrac{(14 - 10)10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 2$ МПа;

III участок: $\sigma = -\dfrac{R_2}{A} = \dfrac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -8$ МПа.

6. Строим эпюру напряжений (рис. 4.1, *б*).

Задача 2. **Для стержня (рис. 4.2, *а*), состоящего из медной и стальной частей, определить температурные напряжения при нагреве на** 50° C**, если заданы** $a = 1$ м, $b = 1{,}5$ м**, модули упругости стали и меди** $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{11}$ Па**.**

Температурные коэффициенты линейного расширения:

$$\alpha_{\text{ст}} = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}; \quad \alpha_{\text{н}} = 16{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}.$$

Система один раз статически неопределима. Выбираем основную систему, отбрасывая правую заделку (рис. 4.2, *б*). Изображаем эквивалентную систему (рис. 4.2, *в*).

Составляем уравнение равновесия и уравнение деформаций.

Уравнение равновесия

$$\sum F_x = N_{\text{м}} - N_{\text{ст}} = 0 \Rightarrow N_{\text{м}} = N_{\text{ст}} = N.$$

Содержание уравнения деформаций заключается в том, что суммарная продольная деформация бруса равна нулю. Эта суммарная деформация состоит из свободной деформации бруса (без заделок) при изменении температуры (Δl_t) и упругой деформации бруса под действием силового взаимодействия с заделкой (Δl_N).

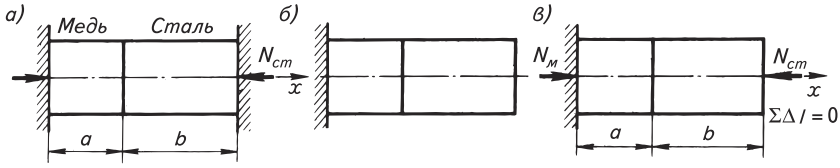


Рис. 4.2

Уравнение деформаций

$$\sum \Delta l = \Delta l_{\text{м}} + \Delta l_{\text{ст}} = 0,$$

где $\Delta l_{\text{м}} = \Delta l_{t\text{м}} + \Delta l_{N\text{м}}$; $\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{t\text{ст}} + \Delta l_{N\text{ст}}$.

Как известно, в общем случае удлинение при нагреве $\Delta l_t = \alpha \Delta t\, l$, деформация от реакции $\Delta l_N = Nl/(EA)$.

Тогда, подставляя эти выражения в уравнение деформации, получим

$$\left(\alpha_{\text{м}} \Delta t a - \frac{N_{\text{м}} a}{EA}\right) + \left(\alpha_{\text{ст}} \Delta t b - \frac{N_{\text{ст}} b}{EA}\right) = 0.$$

Но, как следует из равновесия, $N_{\text{м}} = N_{\text{ст}} = N$ и тогда

$$(\alpha_{\text{м}} a + \alpha_{\text{ст}} b)\Delta t = \frac{N}{A}\left(\frac{a}{E_{\text{м}}} + \frac{b}{E_{\text{ст}}}\right),$$

откуда

$$N = \frac{A \Delta t (\alpha_{\text{м}} a + \alpha_{\text{ст}} b)}{a/E_{\text{м}} + b/E_{\text{ст}}}.$$

Температурные напряжения (одинаковые для всех участков бруса) будут равны

$$\sigma_t = -\frac{N}{A} = -\frac{\Delta t(\alpha_{\text{м}} a + \alpha_{\text{ст}} b)}{a/E_{\text{м}} + b/E_{\text{ст}}} =$$
$$= -\frac{50(16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 + 12{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}5)}{1/(1 \cdot 10^{11}) + 1{,}5/(2 \cdot 10^{11})} = 100{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 3. **Абсолютно жесткая балка (рис. 4.3, *а*) подвешена на трех стальных стержнях: средний стержень на** $0{,}5$ мм **короче требуемой длины и поставлен на место с начальным напряжением. Определить монтажные напряжения в стержнях, если площади поперечного сечения стержней одинаковы и равны** $A = 2$ см^2**, и, если заданы длина стержня** $l = 1$ м**, модуль упругости** $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

После монтажа в силу симметрии конструкции жесткая балка займет горизонтальное положение, показанное на рисунке штриховыми линиями. Очевидно, крайние стержни будут сжаты и их

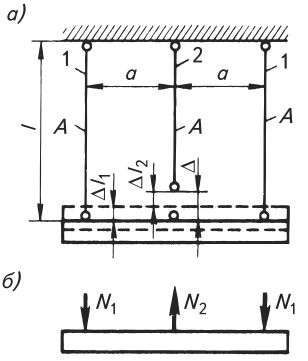


Рис. 4.3

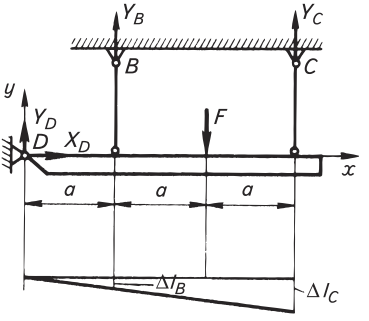


Рис. 4.4

деформация составит Δl_1. Средний стержень будет растянут и его деформация составит Δl_2.

На рис. 4.3, *б* показана балка с действующими на нее реакциями стержней после монтажа. Как видно, система один раз статически неопределима.

Уравнение равновесия

$$\sum F_y = -N_1 + N_2 - N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = 2N_1.$$

Содержание уравнения деформаций заключается в том, что сумма абсолютных деформаций крайнего и среднего стержней равна зазору Δ, т. е.

$$|\Delta l_1| + |\Delta l_2| = \Delta,$$

где $|\Delta l_1| = N_1 l/(EA)$; $|\Delta l_2| = N_2 l/(EA) = 2N_1 l/(EA)$.

Подставляем значения Δl_1 и Δl_2 в уравнение деформаций:

$$N_1 l/(EA) + 2N_1 l/(EA) = \Delta \Rightarrow N_1 =$$

$$= \frac{EA}{3}\frac{\Delta}{l} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 1} = 6{,}67 \text{ кН},$$

$$N_2 = 2N_1 = 13{,}34 \text{ кН}.$$

Монтажные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = -N_1/A = -6{,}67 \cdot 10^3/(2 \cdot 10^{-4}) = -33{,}33 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = N_2/A = 66{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 4. **Абсолютно жесткая балка подвешена на двух одинаковых стержнях (рис. 4.4); определить реакции опор, если заданы F, a, l, определить площадь поперечного сечения A стержней, если задано допускаемое напряжение $[\sigma]$.**

1. Направляем реакции опор и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_x = X_D = 0 \Rightarrow X_D = 0;$$

$$\sum F_y = Y_D + Y_B + Y_C - F = 0 \Rightarrow Y_D + Y_B + Y_C = F;$$

$$\sum M_D = Y_B a - F \cdot 2a + Y_C 3a = 0 \Rightarrow Y_B + 3Y_C = 2F.$$

2. Составляем уравнение деформаций. Для стержневых систем, работающих на растяжение-сжатие, как в этой и предыдущей задачах, можно рекомендовать общий подход к составлению уравнения деформации. Рисуется система до нагружения и после нагружения. Выделяются отрезки, представляющие собой деформации стержней. Анализ геометрических соотношений между этими отрезками и позволяет составить уравнение равновесия.

В данной задаче до нагружения балка занимала горизонтальное положение. После нагружения она может только повернуться на некоторый угол вокруг точки D, оставаясь прямолинейной, вследствие заданной в условии задачи абсолютной жесткости. Выделим деформации стержней Δl_B и Δl_C в виде отрезков, которые одновременно являются катетами подобных прямоугольных треугольников. Отсюда получаем уравнение деформаций:

$$\frac{\Delta l_C}{\Delta l_B} = \frac{3a}{a}.$$

Но $\Delta l_C = \dfrac{Y_C l}{EA}$, $\Delta l_B = \dfrac{Y_B l}{EA}$. Подставляя Δl_C и Δl_B в уравнение, получим $Y_C = 3Y_B$.

3. Определение реакций. Это уравнение совместно с уравнениями равновесия образует систему из трех уравнений для определения трех неизвестных реакций:

$$\begin{cases} Y_D + Y_B + Y_C = F; \\ Y_B + 3Y_C \quad\;\; = 2F; \\ -3Y_B + Y_C \quad = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$Y_B = \frac{1}{5}F; \quad Y_C = \frac{3}{5}F; \quad Y_D = \frac{1}{5}F.$$

4. Расчет на прочность. Подбор сечения. Наиболее нагруженным является стержень C. Нормальные напряжения, возникающие в нем, не должны превышать допускаемых:

$$\sigma_C = \frac{3F}{5A} \leqslant [\sigma].$$

Отсюда получаем неравенство для определения площади поперечного сечения стержней:

$$A \geqslant \frac{3F}{5[\sigma]}.$$

4.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ НА КРУЧЕНИЕ

Наиболее распространенной статически неопределимой задачей на кручение является задача на кручение стержня, жестко заделанного с двух концов.

Задача 1. **Построить эпюру крутящих моментов для стержня с заделками с двух концов, нагруженного сосредоточенными моментами (рис. 4.5). Определить диаметр стержня, если заданы** $M = 10$ кН $\cdot$ м, $a = 0{,}5$ м, **допускаемое напряжение** $[\tau] = 80$ МПа, **жесткость стержня на всех участках одинакова.**

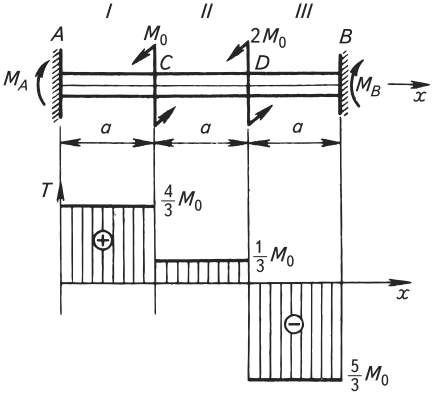


Рис. 4.5

1. В заделках возникают моменты M_A и M_B реакции на действие внешних моментов. Они будут действовать в противоположную сторону. Нанесем их на схему. Задача является один раз статически неопределимой, так как можно использовать единственное уравнение равновесия — уравнение для моментов относительно оси x. Все остальные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются, т. е. дают тождество $0 \equiv 0$.

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_x = M + 2M - M_A - M_B = 0 \Rightarrow M_A + M_B = 3M.$$

2. Составляем уравнение деформаций. Для всех стержней с двумя заделками уравнение деформаций заключается в том, что деформация (угол закручивания) сечения одной заделки относительно другой равна нулю:

$$\varphi_{BA} = 0.$$

Угол закручивания сечения B относительно сечения A можно представить как сумму деформаций:

$$\varphi_{BA} = \varphi_{CA} + \varphi_{DC} + \varphi_{BD}.$$

Для определения (в общем виде) деформаций разбиваем стержень на три участка и составляем уравнения для крутящего момента и углов закручивания по участкам:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $T = M_A$; $\varphi_{CA} = \dfrac{M_A a}{GJ_\text{р}}$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $T = M_A - M$; $\varphi_{DC} = \dfrac{(M_A - M)a}{GJ_\text{р}}$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $T = M_A - M - 2M$; $\varphi_{BD} = \dfrac{(M_A - 3M)a}{GJ_\text{р}}$.

Подставляем в уравнение деформаций полученные выражения для углов закручивания:

$$\frac{M_A a}{GJ_\text{р}} + \frac{(M_A - M)a}{GJ_\text{р}} + \frac{(M_A - 3M)a}{GJ_\text{р}} = 0,$$

откуда определяем момент в заделке A:

$$M_A = \frac{4}{3}M.$$

Из уравнения равновесия определяем момент в заделке B:

$$M_B = \frac{5}{3}M.$$

3. Расчет на прочность — подбор сечения. Определив моменты в заделках, строим эпюру крутящих моментов (рис. 4.5). Записываем уравнения по участкам:

I участок: $T = \dfrac{4}{3}M$;

II участок: $T = \dfrac{4}{3}M - M = \dfrac{1}{3}M$;

III участок: $T = \dfrac{4}{3}M - 3M = -\dfrac{5}{3}M$.

Из эпюры следует, что наиболее нагруженным является III участок. В каждом сечении III участка

$$\tau_{\max} = 5M/(3W_\text{р}),$$

где $W_\text{р} = \pi d^3/16 \simeq 0,2d^3$.

В расчетах на прочность при кручении знак крутящего момента опускаем, так как все материалы одинаково сопротивляются кручению как по часовой стрелке, так и против.

Из условия прочности $\tau_{\max} \leqslant [\tau]$ следует

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{25M_0}{3[\tau]}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{25 \cdot 10 \cdot 10^3}{3 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,1014 \text{ м} = 101,4 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—69 на нормальные линейные размеры из $Ra40$ выбираем $d_{\text{н}} = 100$ мм. При выбранном размере максимальное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{5M}{3W_{\text{р}}} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^3}{3 \cdot 0,2 \cdot 0,1^3} = 83,33 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составит

$$\Delta_\tau = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100\% = \frac{83,33 - 80}{80} 100\% = 4,166\%,$$

что допустимо. Поэтому оставляем диаметр $d_{\text{н}} = 100$ мм.

4.3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ НА ИЗГИБ

4.3.1. Раскрытие статической неопределимости балок с помощью универсального уравнения изогнутой оси

Балки на более чем двух опорах или с двумя заделками являются статически неопределимыми. Универсальное уравнение может быть эффективно использовано для статически неопределимых балок.

Порядок решения. 1. Произвольно направляем реакции и составляем уравнения равновесия. Разность между числом реакций n и числом уравнений равновесия (для балок оно равно 2) определяет степень статической неопределимости: $n - 2$.

2. Составляем универсальное уравнение изогнутой оси.

3. Составляем уравнения деформаций, используя граничные условия: на опорах прогиб равен нулю, в заделке прогиб и угол поворота равны нулю. Подставляя координаты заделок и опор в универсальное уравнение, получим n уравнений деформаций. Вместе с уравнениями равновесия имеем $n+2$ уравнений, которые позволяют определить два начальных параметра и n реакций.

Задача 1. **Для заданной статически неопределимой балки (рис. 4.6, *а*) построить эпюры Q и M, подобрать номер двутавра, если заданы** $q = 15$ кН/м, $a = 2$ м, $[\sigma] = 160$ МПа**.**

1. Составляем уравнения равновесия. Направляем реакции произвольно — все вверх:

$$\sum F_y = Y_A + Y_B + Y_C - qa = 0;$$
$$\sum M_C = \frac{1}{2}qa^2 - Y_B a - Y_A 2a = 0.$$

Неизвестных реакций — три, уравнений равновесия — два. Задача один раз статически неопределима.

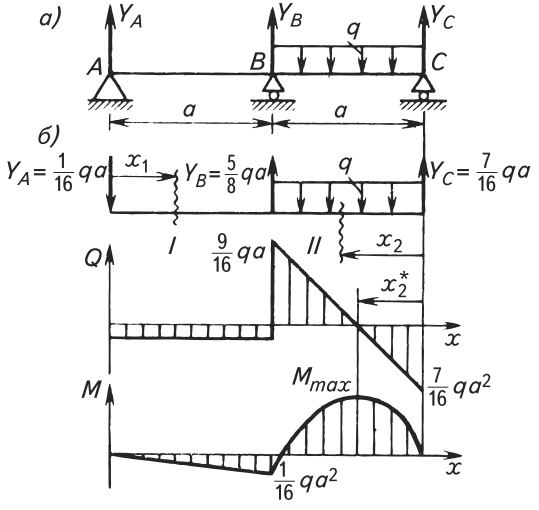


Рис. 4.6

2. Составляем универсальное уравнение изогнутой оси. Помещаем начало координат в крайнее левое сечение балки, в точку A. Если начало координат поместить в точке C, то надо было бы продлить распределенную нагрузку, введя компенсирующую на участке BA. Статическая неопределимость балки не влияет на составление универсального уравнения. Оно будет иметь вид

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \left.\frac{Y_A(x-0)^3}{3!}\right|_{\text{I}} + \frac{Y_B(x-a)^3}{3!} - \left.\frac{q(x-a)^4}{4!}\right|_{\text{II}}.$$

3. Для определения начальных параметров и реакций составим уравнения деформаций. Они заключаются в том, что прогиб балки на каждой опоре равен нулю:

при $x = 0$ получим $y = y_A = 0 \Rightarrow 0 = EJy_0$, откуда $y_0 = 0$;

при $x = a$ получим $y = y_B = 0 \Rightarrow 0 = EJ\theta_0 a + \dfrac{Y_A a^3}{6}$;

при $x = 2a$ получим $y = y_C = 0 \Rightarrow 0 = EJ\theta_0 2a + \dfrac{Y_A(2a)^3}{6} + \dfrac{Y_B a^3}{6} - \dfrac{qa^4}{24}$.

4. Определяем реакции. Получили пять уравнений, одно из которых позволяет сразу определить y_0. Остальные уравнения образуют систему:

$$Y_A + Y_B + Y_C = qa;$$

$$2Y_A + Y_B = \frac{1}{2}qa;$$

$$\frac{1}{6}Y_A a^2 + EJ\theta_0 = 0;$$

$$\frac{4}{3}Y_A a^2 + \frac{1}{6}Y_B a^2 + 2EJ\theta_0 = \frac{1}{24}qa^3.$$

Решаем систему. Из третьего уравнения получим

$$EJ\theta_0 = -\frac{1}{6}Y_A a^2.$$

Подставляя в четвертое уравнение, получим

$$Y_A + \frac{1}{6}Y_B = \frac{1}{24}qa.$$

Добавляем второе уравнение. Получим систему из двух уравнений для определения Y_A и Y_B:

$$\begin{cases} 2Y_A + Y_B = \dfrac{1}{2}qa; \\ Y_A + \dfrac{1}{6}Y_B = \dfrac{1}{24}qa, \end{cases}$$

откуда

$$Y_A = -\frac{1}{16}qa; \quad Y_B = \frac{5}{8}qa;$$

знак минус указывает на то, что реакция Y_A направлена вниз. Из первого уравнения находим

$$Y_C = \frac{7}{16}qa.$$

Угол поворота сечения в опоре A

$$\theta_A = \theta_0 = \frac{1}{96}\frac{qa^3}{EJ}.$$

5. Строим эпюру изгибающих моментов. Рисуем балку с найденными по величине и направлению реакциями, разбиваем ее на два участка (рис. 4.6, *б*). Составляем уравнения для Q и M:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $Q = -Y_A = -\dfrac{1}{16}qa$; $M = -Y_A x_1 = -\dfrac{1}{16}qax_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $Q = -Y_C + qx_2 = -\dfrac{7}{16}qa + qx_2$;

$$M = Y_C x_2 - qx_2\frac{x_2}{2} = \frac{7}{16}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2.$$

Строим эпюры. Определяем максимум изгибающего момента на II участке:

$$Q = 0 \Rightarrow -\frac{7}{16}qa + qx_2^* = 0; \quad x_2^* = \frac{7}{16}a;$$

$$M_{\max} = \frac{7}{16}qa\left(\frac{7}{16}a\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{7}{16}a\right)^2 = \frac{49}{512}qa^2 = 0,096qa^2.$$

Изгибающий момент в опоре B

$$M_B = \frac{1}{16}qa^2 = 0,0625qa^2.$$

Следовательно, опасное сечение — сечение на II участке с координатой $x_2^* = \dfrac{7}{16}a$.

6. Расчет на прочность. Подбор двутаврового сечения. Максимальное напряжение в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{0,096qa^2}{W}.$$

Из условия прочности $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$ определяем осевой момент сопротивления искомого двутавра:

$$W \geqslant \frac{0,096qa^2}{[\sigma]} = \frac{0,096 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{160 \cdot 10^6} = 36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 36 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (см. Приложение 2) этому неравенству удовлетворяет двутавр № 10 с $W_{\text{н}} = 39,7$ см^3.

Максимальное напряжение в выбранном двутавре

$$\sigma_{\max} = \frac{0,096qa^2}{W_{\text{н}}} = \frac{0,096 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{39,7 \cdot 10^{-6}} = 145 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta_\sigma = \frac{160 - 145}{160}100\% = 9,3\%.$$

Задача 2. **Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 4.7), если заданы** q, l.

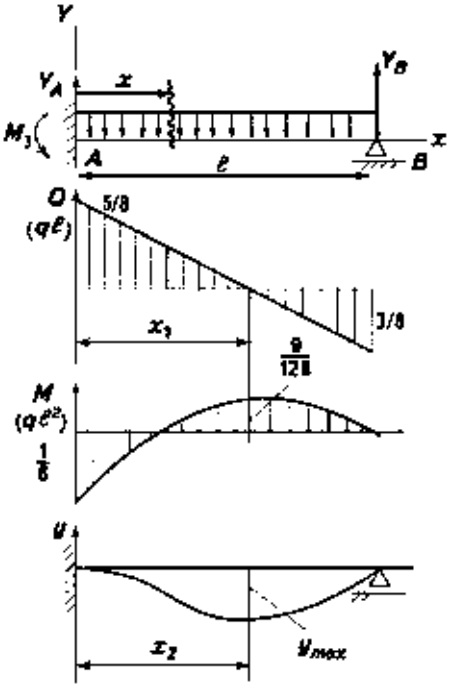


Рис. 4.7

1. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_y = Y_A - ql + Y_B = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = ql;$$

$$\sum M_B = M_з + ql\frac{l}{2} - Y_A l = 0 \Rightarrow M_з - Y_A l = -\frac{1}{2}ql^2.$$

2. Составляем универсальное уравнение изогнутой оси балки. Начало координат помещаем в заделку, тогда начальные параметры y_0 и θ_0 обращаются в нуль:

$$EJy = -\frac{M_з(x-0)^2}{2!} + \frac{Y_A(x-0)^3}{3!} - q\frac{(x-0)^4}{4!},$$

откуда

$$EJy = -\frac{1}{2}M_з x^2 + \frac{1}{6}Y_A x^3 - \frac{1}{24}qx^4.$$

3. Составляем уравнение деформаций. Прогиб в опоре B равен нулю:

$$0 = -\frac{1}{2}M_з l^2 + \frac{1}{6}Y_A l^3 - \frac{1}{24}ql^4.$$

4. Получаем систему двух уравнений для определения реакций Y_A и $M_з$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}Y_A l - M_з = \dfrac{1}{12}ql^2; \\ -Y_A l + M_з = -\dfrac{1}{2}ql^2, \end{cases}$$

откуда

$$Y_A = \frac{5}{8}ql; \quad M_з = \frac{1}{8}ql^2; \quad Y_B = \frac{3}{8}ql.$$

Данная задача может быть решена непосредственно с помощью дифференциального уравнения прогнутой оси.

Помещая начало координат в заделку, в произвольном сечении с координатой x $(0 \le x \le l)$, запишем уравнения для Q и M:

$$Q = Y_A - qx,$$

$$M = -M_з + Y_A x - \frac{1}{2}qx^2.$$

Дифференциальное уравнение прогнутой оси

$$EJy'' = -M_з + Y_A x - \frac{1}{2}qx^2.$$

Интегрируя, получим уравнение углов поворота ($\theta_0 = 0$):

$$EJy' = EJ\theta = -M_з x + Y_A \frac{x^2}{2} - q\frac{x^3}{6}.$$

Интегрируя еще раз, получим уравнение прогибов ($y_0 = 0$):

$$EJy = -M_з \frac{x^2}{2} + Y_A \frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24}.$$

То есть приходим к тому же уравнению.

Подставляя полученные значения для Y_A, Y_B, $M_з$, получим:

$$Q = \frac{5}{8}ql - qx,$$

$$M = -\frac{1}{8}ql^2 + \frac{5}{8}qlx - \frac{1}{2}qx^2,$$

$$\theta = \frac{q}{EJ}\left(-\frac{l^2 x}{8} + \frac{5lx^2}{16} - \frac{qx^3}{6}\right),$$

$$y = \frac{q}{EJ}\left(-\frac{l^2 x^2}{16} + \frac{5lx^3}{48} - \frac{qx^4}{24}\right).$$

Для построения эпюры M определим координату сечения x_1, в котором $Q = 0$:

$$Q = \frac{5}{8}ql - qx_1 = 0, \qquad x_1 = \frac{5}{8}ql.$$

Тогда

$$M_{\max} = M_{(x_1=\frac{5}{8}ql)} = \\ = -\frac{1}{8}ql^2 + \frac{5}{8}ql\frac{5}{8}l - \frac{1}{2}q\left(\frac{5}{8}l\right)^2 = -\frac{9}{128}ql^2.$$

Для построения изогнутой оси балки определим координату сечения x_2, в котором

$$\theta = y' = 0,$$
$$-\frac{1}{8}l^2x_2 + \frac{5}{16}lx_2^2 - \frac{1}{6}qx_2^3 = 0,$$

откуда

$$x_2^2 - \frac{15}{8}lx_2 + \frac{6}{8}l^2 = 0,$$
$$x_2 = \frac{15}{16}l \pm \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 l^2 - \frac{6}{8}l^2} = 0,579l.$$

Определим максимальное значение прогиба

$$y_{\max} = y_{(x_2=0,579l)} = 0,0054 - \frac{ql^4}{EJ}.$$

Строим эпюры (рис. 4.7).

4.3.2. Метод сил для раскрытия статической неопределимости балок и рам

Суть метода сил заключается в *определении «лишних» реакций* путем представления их *как неизвестных внешних нагрузок*, величина которых определяется из уравнений деформации.

Освобождая систему от «лишней» связи, определяем такое значение реакции, при котором выполняется условие деформации, накладываемое отброшенной связью. Условие деформации, накладываемое отбрасываемой «лишней» связью, и есть *уравнение деформации.*

Для один раз статически неопределимых задач в общем виде уравнение деформации имеет вид

$$\delta = \Delta,$$

где Δ — деформация, допускаемая отброшенной «лишней» связью.

Деформацию δ в системе с отброшенной «лишней» связью определяем отдельно: $\delta(F)$ — от внешних нагрузок, $\delta(X)$ — от неизвестной «лишней» реакции X. Используя закон Гука, деформацию от силы X можно представить как деформацию от единичной силы $\delta(1)$, увеличив ее в X раз $\delta(X) = X\delta(1)$. Тогда уравнение деформации принимает вид

$$\delta = \delta(F) + X\delta(1) = \Delta.$$

Чаще всего $\Delta = 0$, тогда неизвестная «лишняя» реакция определяется из уравнения

$$X = -\frac{\delta(F)}{\delta(1)}.$$

Задача 3. **Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 4.8, *а*) методом сил, если заданы a и q. Данная задача ранее была решена с помощью универсального уравнения. Рассмотрим решение ее методом сил.**

1. Балка один раз статистически неопределима. За «лишнюю» опору принимаем правую опору C. Получаем основную систему — балку на двух опорах с консолью, нагруженную распределенной нагрузкой. Если к этой основной системе приложить неизвестную вертикальную силу X в точке C и наложить условие отброшенной связи, то получим эквивалентную систему (рис. 4.8, *б*), т. е. статически определимую систему, эквивалентную заданной статически неопределимой. Условие отброшенной связи: вертикальное перемещение (прогиб) точки C должно быть равно нулю, т. е. $\delta_C^b = 0$. Это и есть уравнение деформации.

2. Эквивалентную систему представляем, пользуясь принципом независимости действия сил, как сумму двух систем. Одна система — балка, нагруженная только внешней нагрузкой, другая система — балка, нагруженная силой X. В свою очередь балку, нагруженную

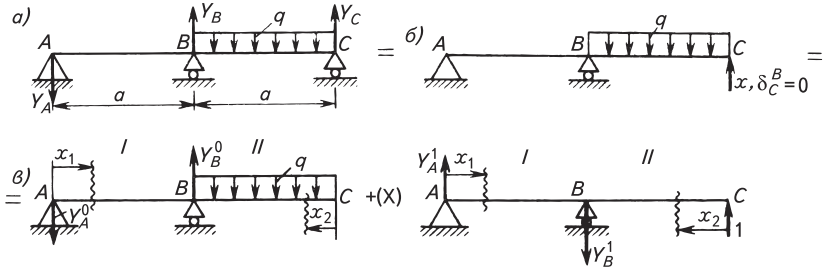


Рис. 4.8

силой X, можно представить как балку, нагруженную силой $X=1$, увеличив все значения реакций, моментов, перемещений в X раз. Это разбиение представлено на рис. 4.8, *в*. Можно было бы не доводить разбиение до системы с единичной силой, но при расчете перемещений с помощью интегралов Мора все равно придется ввести систему с единичной силой.

3. С помощью интегралов Мора определяем вертикальное перемещение точки C в основной системе и в системе с единичной силой.

Предварительно определяем реакции:

в основной системе $Y_A^0=\dfrac{1}{2}qa$; $Y_B^0=\dfrac{3}{2}qa$;

в системе с единичной силой $Y'_A=1$; $Y'_B=2$.

Составляем выражения изгибающих моментов для двух систем:

I участок: $0\leqslant x_1\leqslant a$; $M=-Y_Ax_1=-\dfrac{1}{2}qax_1$; $M_1=1\cdot x_1$;

II участок: $0\leqslant x_2\leqslant a$; $M=-\dfrac{1}{2}qx_2^2$; $M_1=1\cdot x_2$.

Вертикальное перемещение точки C в основной системе

$$EJ\delta_C^{\text{в}}(F)=-\int_0^a\frac{1}{2}qax_1^2\mathrm{d}x_1-\int_0^a\frac{1}{2}qx_2^3\mathrm{d}x_2=-\frac{7}{24}qa^4.$$

Вертикальное перемещение точки C в системе с единичной силой

$$EJ\delta_C^{\text{в}}(1)=\sum_i\int_0^{l_i}M_1^2\mathrm{d}x=\int_0^a x_1^2\mathrm{d}x_1+\int_0^a x_2^2\mathrm{d}x_2=\frac{2}{3}a^3.$$

Здесь единичная сила выступает как внешняя нагрузка и как условная единичная сила.

4. Определяем реакции. Реакция в опоре C

$$Y_C=X=-\frac{\delta_C^{\text{в}}(F)}{\delta_C^{\text{в}}(1)}=\frac{7qa^4\cdot 3}{24\cdot 2\cdot a^3}=\frac{7}{16}qa.$$

Как и следовало ожидать, результат совпадает с ранее полученным с помощью универсального уравнения.

Остальные две реакции определяются из двух уравнений равновесия.

Задача 4. **Раскрыть статическую неопределимость рамы (рис. 4.9, *а*), построить эпюры N, Q, M и определить горизонтальное перемещение опоры B, если заданы q, a, EJ.**

1. Система один раз статически неопределима: неизвестных реакций — четыре (X_A, Y_A, $M_{\text{з}}$ и Y_B), а уравнений равновесия — три.

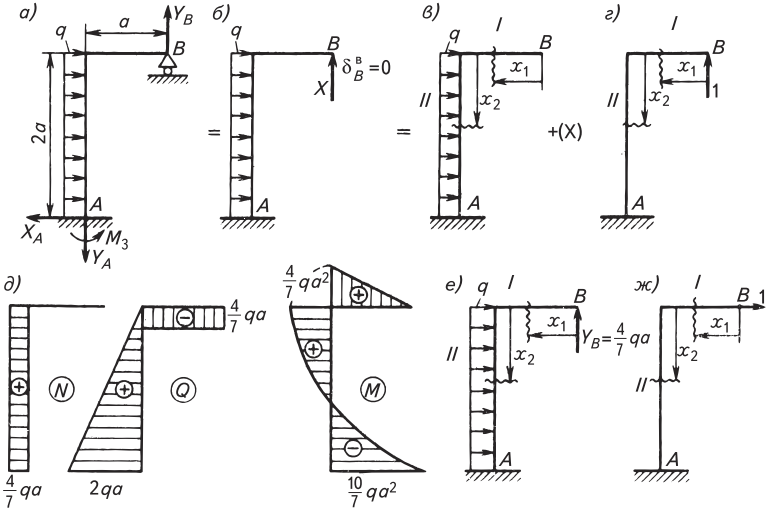


Рис. 4.9

2. Выбираем основную систему, «отбрасывая» опору B.

3. Изображаем эквивалентную систему. Реакцию «лишней» связи обозначим через X (очевидно, $X = Y_B$) (рис. 4.9, *б*).

Обязательным условием эквивалентности системы будет равенство нулю вертикального перемещения опоры B, т. е. $\delta_B^в = 0$. В этом заключается содержание уравнения деформаций.

Пользуясь принципом независимости действия сил, представим эквивалентную систему состоящей из двух систем: первая — основная, без «лишней» связи, но с заданной нагрузкой (рис. 4.9, *в*), вторая — без заданной нагрузки (рис. 4.9, *г*), но с неизвестной вертикальной силой X, приложенной в точке B. Последнюю представляем как систему, нагруженную единичной силой $X = 1$, все параметры которой увеличиваем в X раз.

Тогда уравнение перемещений будет иметь вид

$$\delta_B^в = \delta_B^в(F) + X\delta_B^в(1) = 0,$$

где $\delta_B^в(F)$ — вертикальное перемещение точки B от заданной нагрузки в основной системе; $\delta_B^в(1)$ — вертикальное перемещение точки B от единичной вертикальной силы, приложенной в точке B, в системе с единичной силой.

4. Определяем реакцию $X = Y_B$. Перемещения $\delta_B^в(F)$, $\delta_B^в(1)$ определяем с помощью интегралов Мора. Записываем выражения для изгибающих моментов:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = 0$; $M_1 = 1 \cdot x_1$;
II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $M = -qx_2^2/2$; $M_1 = 1 \cdot a$.

Определяем перемещения:

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(F) = -\int_0^{2a} \frac{1}{2} q x_2^2 a \mathrm{d}x_2 = -\frac{4}{3} q a^4; \quad \delta_B^{\text{в}}(F) = -\frac{4qa^4}{3EJ};$$

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(1) = \int_0^a x_1^2 \mathrm{d}x_1 + \int_0^{2a} a^2 \mathrm{d}x_2 = \frac{7}{3} a^3; \quad \delta_B^{\text{в}}(1) = \frac{7a^3}{3EJ}.$$

Подставляем значения $\delta_B^{\text{в}}(F)$ и $\delta_B^{\text{в}}(1)$ в уравнение деформаций:

$$-\frac{4}{3}\frac{qa^4}{EJ} + X\frac{7a^3}{3EJ} = 0 \Rightarrow X = Y_B = \frac{4}{7} qa.$$

5. После раскрытия статической неопределимости системы определяем реакции в заделке из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = -X_A + 2qa = 0 \Rightarrow X_A = 2qa;$$

$$\sum F_y = -Y_A + Y_B = 0 \Rightarrow Y_A = Y_B = \frac{4}{7} qa;$$

$$\sum M_A = Y_B 2a - 2qaa + M_{\text{з}} = 0 \Rightarrow M_{\text{з}} = \frac{10}{7} qa^2.$$

6. После раскрытия статической неопределимости в дальнейшем все расчеты проводим с эквивалентной системой. Строим эпюры N, Q, M для эквивалентной системы при найденном значении (рис. 4.9, *д*).

Определяем горизонтальное перемещение $\delta_B^{\text{г}}$ сечения B в эквивалентной системе. Для этого изображаем две системы: эквивалентную систему (рис. 4.9, *е*) и систему, освобожденную от внешних нагрузок, с единичной горизонтальной силой, приложенной в точке B (рис. 4.9, *ж*). С помощью интегралов Мора определяем искомое перемещение:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = \frac{4}{7} qax_1$; $M_1 = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant 2a$; $M = \frac{4}{7} qa^2 - \frac{1}{2} qx_2^2$; $M_1 = -1 \cdot x_2$;

$$EJ\delta_B^{\text{г}} = \int_0^{2a} \left(\frac{4}{7} qa^2 - \frac{1}{2} qx_2^2 \right) (-x_2) \mathrm{d}x_2 = -\frac{4}{7} qa^2 \frac{(2a)^2}{2} + \frac{q}{2} \frac{(2a)^4}{4} = \frac{6}{7} qa^4,$$

откуда $\delta_B^{\text{г}} = \frac{6}{7} \frac{qa^4}{EJ}$.

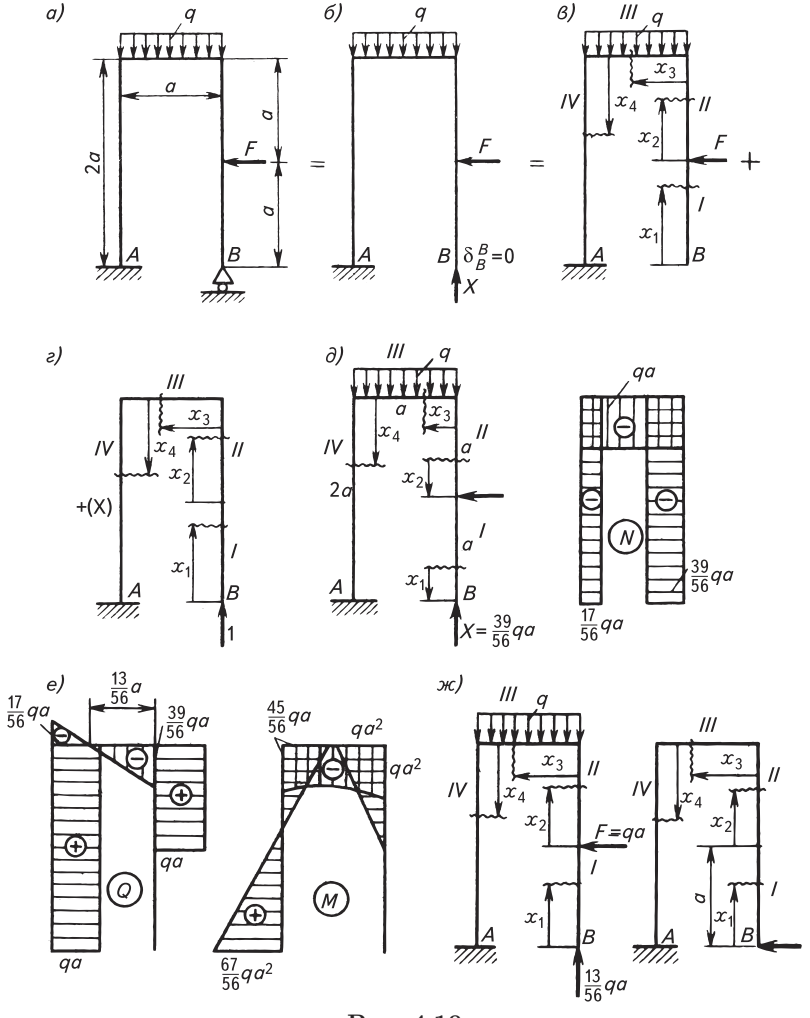


Рис. 4.10

Задача 5. **Построить эпюры N, Q, M и определить перемещение шарнирной опоры B в статически неопределимой раме (рис. 4.10, *а*), если заданы q, $F = qa$, a, EJ.**

Решение задачи приводится без подробных пояснений. Они аналогичны предыдущим.

1. За «лишнюю» принимаем реакцию Y_B в опоре B, заменив ее действие неизвестной силой X и «отбросив» опору B. Определяем

силу X из уравнения деформаций:

$$\delta_B^{\text{в}} = \delta_B^{\text{в}}(F) + X\delta_B^{\text{в}}(1) = 0.$$

Предварительно разбиваем эквивалентную систему (рис. 4.10, *б*) на основную (рис. 4.10, *в*) и дополнительную с единичной силой $X = 1$, в которой реакции, моменты, перемещения увеличиваем в X раз (рис. 4.10, *г*). Определяем перемещения:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = 0$; $M_1 = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = -Fx_2 = -qax_2$; $M_1 = 0$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $M = -Fa - \dfrac{1}{2}qx_3^2 = -qa^2 - \dfrac{1}{2}qx_3^2$; $M_1 = 1 \cdot x_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant 2a$; $M = -F(a - x_4) - \dfrac{1}{2}qa^2 = -\dfrac{3}{2}qa^2 + qax_4$;

$M_1 = 1 \cdot a$;

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(F) = -\int_0^a \left(qa^2 + \frac{1}{2}qx_3^2\right) x_3 \mathrm{d}x_3 + \int_0^{2a} \left(-\frac{3}{2}qa^2 + qax_4\right) a \mathrm{d}x_4 =$$

$$= qa^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\cdot 2 + \frac{2^2}{2}\right) = -\frac{13}{8}qa^4,$$

откуда

$$\delta_B^{\text{в}} = -\frac{13}{8}\frac{qa^4}{EJ};$$

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(1) = \int_0^a x_3^2 \mathrm{d}x_3 + \int_0^{2a} a^2 \mathrm{d}x_4 = \frac{7}{3}a^3,$$

откуда

$$\delta_B^{\text{в}}(1) = 7a^3/(3EJ).$$

Подставляем значения $\delta_B^{\text{в}}(F)$ и $\delta_B^{\text{в}}(1)$ в уравнение деформаций, откуда находим $X = \dfrac{39}{56}qa$. Дальнейшие действия производим со статически определимой эквивалентной системой (рис. 4.10, *д*).

2. Строим эпюры N, Q, M (рис. 4.10, *е*). Обход контура рамы проводим против часовой стрелки (рис. 4.10, *д*).

3. Определяем перемещение $\delta_B^{\text{г}}$ в эквивалентной системе с помощью интегралов Мора (рис. 4.10, *ж*). Для этого к раме, свободной от внешних нагрузок, приложим в точке B горизонтальную единичную силу (рис. 4.10, *ж*):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = 0$; $M_1 = -1 \cdot x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = -qax_2$; $M_1 = -1(a + x_2)$;

$$\textit{III участок: } 0 \leqslant x_3 \leqslant a;\ M = \frac{39}{56}qax_3 - qa^2 - \frac{1}{2}qx_3^2;\ M_1 = -1 \cdot 2a;$$

$$\textit{IV участок: } 0 \leqslant x_4 \leqslant 2a;\ M = \frac{39}{56}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 - qa(a - x_4) = -\frac{45}{56}qa^2 + qax_4;$$

$$M_1 = -1(2a - x_4);$$

$$EJ\delta_B = \int_0^a qax_2(a + x_2)\mathrm{d}x_2 + \int_0^a \left(\frac{39}{56}qax_3 - qa^2 - \frac{1}{2}qx_3^2\right)(-2a)\mathrm{d}x_3 +$$

$$+ \int_0^{2a} \left(qax_4 - \frac{45}{56}qa^2\right)(x_4 - 2a)\mathrm{d}x_4 =$$

$$= qa^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{39}{56} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2^3}{3} - \frac{45}{56} \cdot \frac{2^2}{2} - 2 \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{45}{56} \cdot 2 \cdot 2\right) =$$

$$= \frac{161}{168}qa^4 \Rightarrow \delta_B = \frac{161}{168} \cdot \frac{qa^4}{EJ} = 0,96\frac{qa^4}{EJ}.$$

Знак плюс показывает, что перемещение направлено в сторону действия единичной силы (влево).

Задача 6. **Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 4.11, *а*) и построить эпюры Q и M, если заданы a, q, $F = qa$.**

1. Балка один раз статически неопределима: неизвестных реакций — три, а уравнений равновесия — два.

2. Выбираем основную систему, «отбрасывая» опору C (рис. 4.11, *в*).

3. Изображаем эквивалентную систему (рис. 4.11, *б*). Реакцию «лишней» связи обозначаем через X (очевидно, $X = Y_C$).

Обязательное условие эквивалентности заключается в равенстве нулю вертикального перемещения (прогиба) сечения C, т. е. $\delta_C^{\text{в}} = 0$. Эквивалентную систему представляем, как сумму основной (рис. 4.11, *в*) и дополнительной (рис. 4.11, *г*) с неизвестной силой X. Последнюю представляем как систему, нагруженную силой $X = 1$, увеличив все параметры системы (реакции, моменты, перемещения) в X раз.

4. Определяем реакцию X из уравнения перемещений. Представляем перемещение сечения C как сумму перемещений от внешних нагрузок $\delta_C^{\text{в}}(F)$ и от неизвестной реакции $X\delta_C^{\text{в}}(1)$:

$$\delta_C^{\text{в}} = \delta_C^{\text{в}}(F) + X\delta_C^{\text{в}}(1) = 0.$$

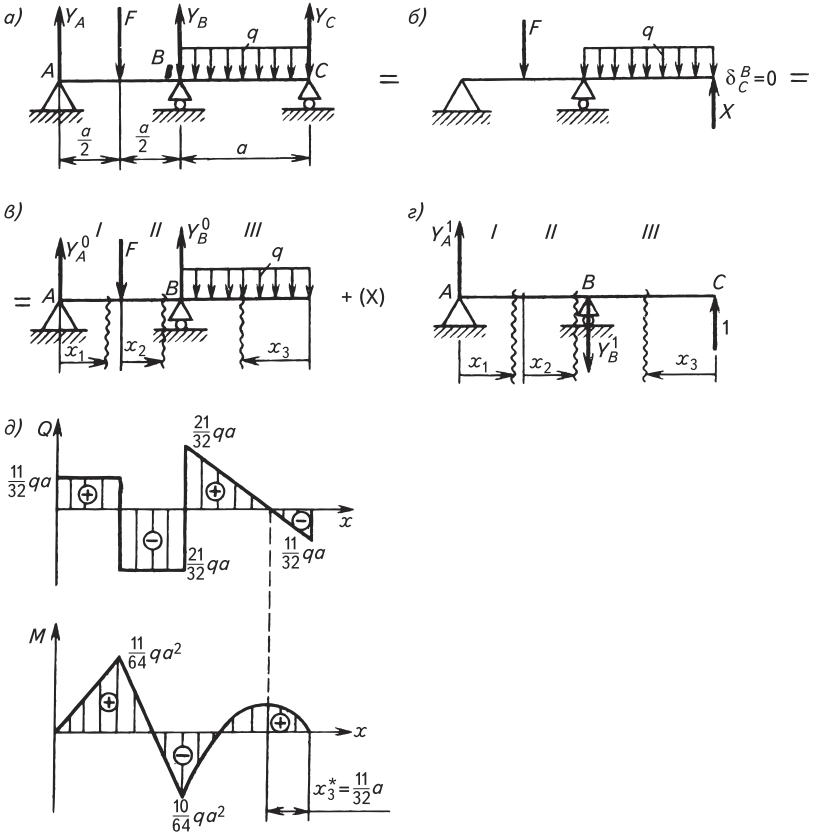


Рис. 4.11

Предварительно определяем реакции:

в основной системе

$$\sum M_A = -F\frac{a}{2} + Y_B^0 a - qa\frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow Y_B^0 = 2qa;$$

$$\sum M_B = -Y_A^0 a + F\frac{a}{2} - qa\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow Y_A^0 = 0;$$

в системе с единичной силой

$$\sum M_A = -Y_B' a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow Y_B' = 2;$$

$$\sum M_B = -Y_A' a + 1 \cdot a = 0 \Rightarrow Y_A' = 1.$$

Составляем выражения для изгибающего момента по участкам в обеих системах:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{a}{2}$; $M = 0$; $M_1 = 1 \cdot x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{a}{2}$; $M = -Fx_2 = -qax_2$; $M_1 = 1\left(\dfrac{a}{2} + x_2\right)$;

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant a$; $M = -\dfrac{1}{2}qx_3^2$; $M_1 = 1 \cdot x_3$.

Определяем перемещения:

$$EJ\delta_C^{\text{в}}(F) = -\int_0^{a/2} qax_2\left(\frac{a}{2} + x_2\right)\mathrm{d}x_2 - \int_0^a \frac{1}{2}qx_3^3\mathrm{d}x_3 =$$

$$= qa^4\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{48}qa^4; \quad \delta_C^{\text{в}}(F) = -\frac{11}{48}\frac{qa^4}{EJ};$$

$$EJ\delta_C^{\text{в}}(1) = \int_0^{a/2} x_1^2\mathrm{d}x_1 + \int_0^{a/2}\left(\frac{a}{2} + x_2\right)^2\mathrm{d}x_2 + \int_0^a x_3^2\mathrm{d}x_3 =$$

$$= a^3\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}a^3; \quad \delta_C^{\text{в}}(1) = \frac{2a^3}{3EJ}.$$

Подставляем полученные значения в уравнение перемещений. Определяем реакцию:

$$X = Y_C = -\delta_C^{\text{в}}(F)/\delta_C^{\text{в}}(1) = \frac{11}{32}qa.$$

5. Для построения эпюр определим реакции опор A и B, использовав принцип независимости действия сил:

$$Y_A = Y_A^0 + XY_A' = 0 + \frac{11}{32}qa1 = \frac{11}{32}qa;$$

$$Y_B = Y_B^0 + XY_B' = 2qa + \frac{11}{32}qa(-2) = \frac{42}{32}qa.$$

Очевидно, после раскрытия статической неопределимости (найдена сила X) реакции можно определить и обычным путем с помощью уравнений равновесия.

Строим эпюры Q и M в эквивалентной системе (рис. 4.11, *д*). Определим $M_{\max}$ на III участке:

$$Q = -Y_C + qx_3 = -\frac{11}{32}qa + qx_3;$$

$$M = Y_C x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = \frac{11}{32}qax_3 - \frac{1}{2}qx_3^2;$$

$$Q = 0 \Rightarrow x_3^* = \frac{11}{32}a;$$

$$M_{\max} = M_{x_3=\frac{11}{32}a} = \frac{11}{32}qa\frac{11}{32}a - \frac{q}{2}\left(\frac{11}{32}a\right)^2 \simeq 0,059qa^2.$$

Задача 7. **Раскрыть статическую неопределимость рамы на двух жестких шарнирных опорах (рис. 4.12, *а*) при** $a = 1$ м, $F = 15$ кН. **Определить размеры кольцевого сечения** ($\alpha = d/d_{\text{в}} = 0,8$) **рамы, если допускаемое напряжение** $[\sigma] = 160$ МПа.

В двух жестких шарнирных опорах возникают четыре реакции: две горизонтальные — X_A и X_B, две вертикальные — Y_A и Y_B. Уравнений равновесия — три. Задача один раз статически неопределима.

2. Освобождаем раму от одной «лишней» связи — даем возможность опоре B перемещаться в горизонтальном направлении, т. е. опору B из жесткой превращаем в скользящую (рис. 4.12, *б*). В результате получим статически определимую систему. Добавляем к ней неизвестную горизонтальную силу X и условие отброшенной связи — горизонтальное перемещение опоры B должно быть равно нулю, из которого и определяется сила X. При этом условии сила X будет равна реакции X_B в заданной раме. В результате получаем статически определимую эквивалентную систему (рис. 4.12, *б*).

В дальнейшем нагрузку на эквивалентную систему представляем как сумму внешних нагрузок и неизвестной силы X, т. е. представляем эквивалентную систему как сумму двух систем: системы, нагруженной внешними нагрузками, — основной системы (рис. 4.12, *в*) — и системы, нагруженной силой X. Но последнюю представляем как систему, нагруженную единичной силой (рис. 4.12, *г*), с последующим увеличением всех результатов в X раз. Тогда уравнение деформаций (условие отброшенной связи) примет вид

$$\delta_B^{\text{г}} = \delta_B^{\text{г}}(F) + X\delta_B^{\text{г}}(1) = 0.$$

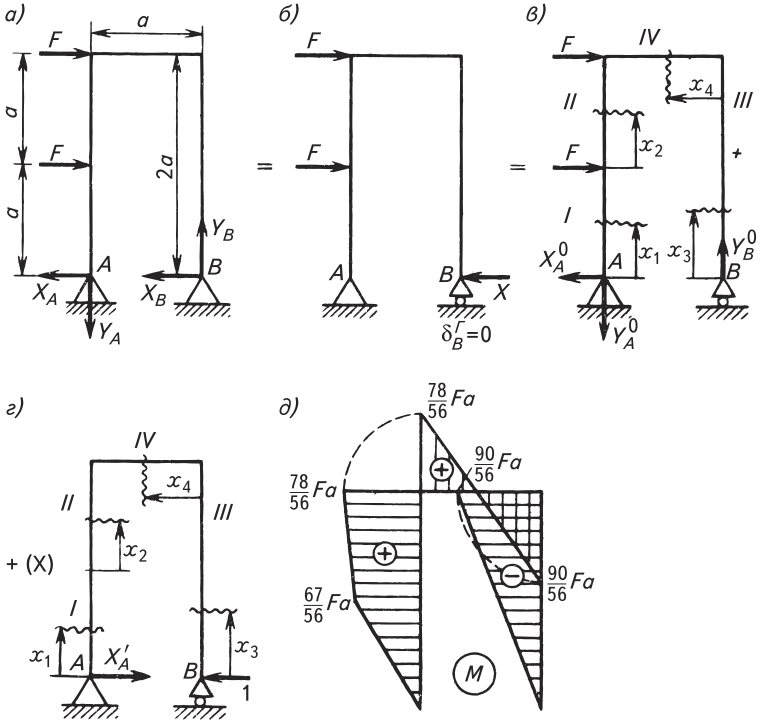


Рис. 4.12

3. Определяем горизонтальное перемещение опоры B от внешних нагрузок и от единичной силы. Предварительно определяем реакции:

в основной системе $X_A^0 = 2F$; $Y_A^0 = Y_B^0 = 3F$;

в системе с единичной силой $X_A' = 1$; $Y_A' = Y_B' = 0$.

Разбиваем (одинаково) обе системы на четыре участка и составляем выражения для изгибающего момента в обеих системах:

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M = X_A^0 x_1 = 2Fx_1$; $M_1 = -X_A' x_1 = -1x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M = X_A^0(a + x_2) - Fx_2 = 2Fa + Fx_2$;

$$M_1 = -X_A'(a + x_2) = -a - x_2;$$

III участок: $0 \leqslant x_3 \leqslant 2a$; $M = 0$; $M_1 = -1 \cdot x_3$;

IV участок: $0 \leqslant x_4 \leqslant a$; $M = Y_B^0 x_4 = 3Fx_4$; $M_1 = -1 \cdot 2a$.

Определяем перемещения с помощью интегралов Мора:

в основной системе

$$EJ\delta_B^{\text{г}}(F) = -\int_0^a 2Fx_1^2\mathrm{d}x_1 - \int_0^a (2Fa + Fx_2)(a + x_2)\mathrm{d}x_2 - \\ - \int_0^a 3Fx_4 2a\mathrm{d}x_4 = -7,5Fa^3;$$

в системе с единичной силой

$$EJ\delta_B^{\text{г}}(1) = \int_0^a x_1^2\mathrm{d}x_1 + \int_0^a (a + x_2)^2\mathrm{d}x_2 + \int_0^{2a} x_3^2\mathrm{d}x_3 + \int_0^a 4a^2\mathrm{d}x_4 = \frac{28}{3}a^3.$$

Из уравнения деформаций определяем реакцию $X_B = X$:

$$X = -\frac{\delta_B^{\text{г}}(F)}{\delta_B^{\text{г}}(1)} = \frac{45}{56}F.$$

Знак плюс показывает, что направление реакции совпадает с направлением единичной силы.

4. Строим эпюру изгибающих моментов. Эпюру будем строить для эквивалентной системы. Пользуясь принципом независимости действия сил, реакции можно определить как сумму реакций в основной системе и системе, нагруженной силой X, т. е.

$$R = R(F) + X \cdot R(1).$$

Тогда получим значения реакций в эквивалентной системе:

$$X_A = X_A^0 - \left(\frac{45}{56}F\right)(X_A') = \left(2 - \frac{45}{56}\right)F = \frac{67}{56}F;$$

$$Y_A = Y_A^0 = 3F; \quad Y_B = Y_B^0 = 3F; \quad \text{так как} \quad Y_A(1) = Y_B(1) = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов по участкам (рис. 4.12, *д*).

5. Расчет на прочность. Подбор сечения. Из эпюры определяем, что опасным сечением будет сечение, где момент максимальный $|M|_{\max} = \dfrac{90}{56}Fa$, а следовательно, и напряжения максимальны $\sigma_{\max} = \dfrac{90Fa}{56W}$, где $W = 0,1d^3(1 - \alpha^4)$ — осевой момент сопротивления кольцевого сечения.

Из условия прочности $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$ определяем наружный диаметр сечения:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{90Fa}{56 \cdot 0,1(1 - \alpha^4)[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{90 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1}{56 \cdot 0,1(1 - 0,8^4)160 \cdot 10^6}} = \\ = 0,1366 \text{ м} = 136,6 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—69 на нормальные линейные размеры (см. Приложение 1) по $Ra40$ выбираем $d_{\text{н}} = 140$ мм. Тогда момент сопротивления сечения

$$W_{\text{н}} = 0,1 \cdot 0,14^3(1 - 0,8^4) = 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Максимальное напряжение при выбранном диаметре

$$\sigma_{\max} = \frac{90 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1}{56 \cdot 1,62 \cdot 10^{-4}} = 148,81 \cdot 10^6 \text{ Н} = 148,81 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит

$$\Delta = \frac{160 - 148,81}{160} 100\% = 7\%.$$

Таким образом, нагрузку выдержит рама с наружным диаметром $d = 140$ мм и внутренним $d_{\text{в}} = 0,8 \cdot 140 = 112$ мм.

Задача 8. **Определить напряжения в стальной и медной частях стержня (рис. 4.13), возникающие при его нагреве на $\Delta t = 30°\text{C}$, если заданы $A = 100$ см^2, $a = 0,15$ м, $b = 0,1$ м, $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$ м, модули упругости $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициенты линейного расширения $\alpha_{\text{ст}} = 12,5 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $\alpha_{\text{м}} = 16,5 \cdot 10^{-6}$ 1/град.**

Ответ. $\sigma_{\text{ст}} = -87$ МПа; $\sigma_{\text{м}} = -43,5$ МПа.

Задача 9. **Определить площадь сечения стержней, поддерживающих абсолютно жесткую балку (рис. 4.14), если заданы $F = 160$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа.**

Ответ. $A = 8$ см^2.

Задача 10. **По условиям задачи 1 (см. § 4.2) построить эпюру крутящих моментов, определить диаметр стержня, если на крайних участках стержень имеет кольцевое сечение с отношением внутреннего диаметра к наружному $\alpha = d_{\text{в}}/d = 0,75$, а на среднем участке — сплошное.**

Ответ. Моменты в заделках $M_A = 1,3M_0$, $M_B = 1,7M_0$. Диаметр сечения $d \geqslant 116$ мм.

Задача 11. **Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки (рис. 4.15), если заданы a, F, EJ.**

Ответ. $Y_A = \dfrac{11}{16}F$; $Y_B = \dfrac{5}{16}F$; $M_{\text{з}} = \dfrac{1}{16}Fa$.

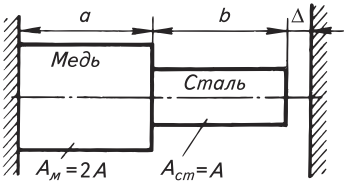


Рис. 4.13

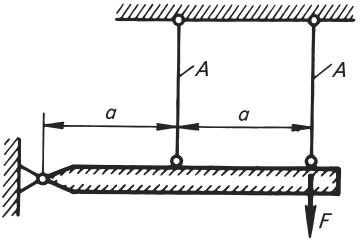


Рис. 4.14

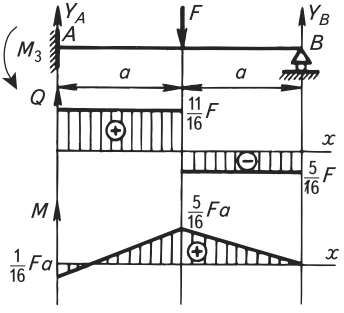


Рис. 4.15

Задача 12. **Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 4.16), если заданы l, F, $M_0 = Fl$.**

Ответ. $X_A = X_B = \dfrac{11}{12}F$; $Y_A = \dfrac{11}{24}F$; $Y_B = \dfrac{13}{24}F$.

Задача 13. **Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 4.17), если заданы $F = 20$ кН, $a = 2$ м.**

Ответ. $X_A = -3F = -60$ кН; $Y_A = Y_B = 2,91$ кН;
$M_З = -\dfrac{207}{68}Fa = -12,18$ кН $\cdot$ м.

Задача 14. **Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры N, Q, M для рамы (рис. 4.18), если заданы a, q.**

Ответ. $X_A = X_B = \dfrac{41}{64}qa$; $Y_A = Y_B = \dfrac{23}{64}qa$.

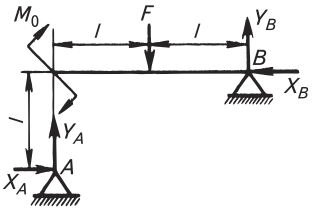


Рис. 4.16

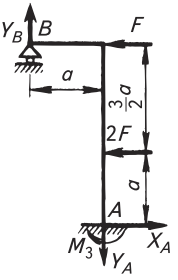


Рис. 4.17

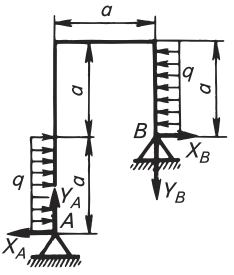


Рис. 4.18

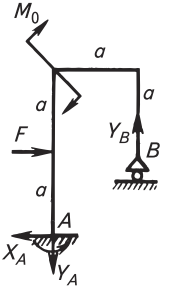


Рис. 4.19

Задача 15. **Раскрыть статическую неопределимость и определить перемещение опоры B для рамы (рис. 4.19), если заданы a, F, $M_0 = 2Fa$, EJ.**

Ответ. $X_A = F$; $Y_A = Y_B = \dfrac{27}{14}F$; $M_з = \dfrac{15}{14}Fa$;

$\delta_B^г = \dfrac{109}{84}\dfrac{Fa^3}{EJ}$ (вправо).

ГЛАВА 5

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сопротивление, когда действующие нагрузки вызывают комбинацию простейших деформаций, называется *сложным*. При расчетах на сложное сопротивление исходят из *принципа независимости действия сил.*

В общем случае действующие внешние нагрузки в любом сечении бруса могут создать *шесть* внутренних факторов: N, Q_y, Q_z, T, M_y, M_z. Каждый из шести внутренних факторов в любой точке сечения вызовет *шесть* соответствующих напряжений: $\sigma(N)$, $\sigma(M_z)$, $\sigma(M_y)$, $\tau(T)$, $\tau(Q_y)$, $\tau(Q_z)$.

Таким образом, в общем случае сложного сопротивления в любой точке могут быть:

а) три нормальных напряжения;

б) три касательных напряжения.

Нормальные напряжения как векторы, направленные перпендикулярно сечению, суммируются алгебраически:

$$\sigma_\Sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y).$$

Касательные напряжения как векторы, действующие в одной плоскости и направленные под углом друг к другу, суммируются геометрически:

$$\overline{\tau}_\Sigma = \overline{\tau}(T) + \overline{\tau}(Q_y) + \overline{\tau}(Q_z).$$

В общем случае в любой точке сечения напряжения приводятся к двум суммарным напряжениям: σ_Σ и τ_Σ.

Оценка влияния этих разноименных напряжений на прочность может быть учтена только путем применения одной из теорий прочности, которые позволяют приравнивать данное сложное сопротивление к эквивалентному по прочности растяжению-сжатию.

Эквивалентные напряжения определяются:

а) по третьей теории прочности (критерий — наибольшие касательные напряжения):

$$\sigma_{\text{экв.III}} = \sqrt{\sigma_\Sigma^2 + 4\tau_\Sigma^2} \leqslant [\sigma];$$

б) по четвертой теории прочности (критерий — энергия изменения формы):

$$\sigma_{\text{экв.IV}} = \sqrt{\sigma_\Sigma^2 + 3\tau_\Sigma^2} \leqslant [\sigma].$$

5.1. КОСОЙ ИЗГИБ

Косой изгиб — изгиб в двух главных плоскостях балки.

Главная плоскость — плоскость, проходящая через продольную ось балки и главную центральную ось инерции сечения, например плоскости xOy и xOz (рис. 5.1). Оси y и z — *главные центральные оси инерции* сечения. При косом изгибе в произвольном сечении балки возникают *четыре* внутренних силовых фактора: изгибающие моменты M_z и M_y и поперечные силы Q_y и Q_z. Влияние поперечных сил в большинстве случаев пренебрежимо мало.

Определение нормальных напряжений и деформаций при косом изгибе основано на *принципе независимости действия сил.* Всю нагрузку проецируют на две главные плоскости балки и строят эпюры изгибающих моментов в этих двух плоскостях. Затем по известным формулам прямого изгиба определяют напряжения и деформации.

Результирующие напряжения определяют алгебраическим сложением:

$$\sigma_{(x,\,y,\,z)} = \sigma(M_z) + \sigma(M_y) = \pm\frac{M_z}{J_z}y \pm \frac{M_y}{J_y}z,$$

а *результирующие деформации* — геометрическим сложением:

$$\overline{\delta}_\Sigma = \overline{\delta}_y + \overline{\delta}_z.$$

Уравнение нейтральной линии $\sigma = 0$, откуда получаем уравнение прямой, проходящей через начало координат:

$$y = \pm\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}z.$$

Знак в уравнении нейтральной линии n—n устанавливается после определения знаков напряжений от каждого изгибающего момента. Нейтральная линия проходит через те квадранты сечения, в которых возникают напряжения растяжения и сжатия. На рис. 5.2 знаки напряжений от M_z показаны в рамке, от M_y — в кружке. Нейтральная линия пройдет через I и III квадранты и в уравнении надо взять знак плюс. (I квадрант образован положительным направлением координатных осей.)

При косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия результирующего изгибающего момента $M_{\text{рез}}$, а отклоняется к оси, относительно которой момент инерции минимален (рис. 5.2).

Наибольшие напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной линии точках. Для симметричных сечений, вписывающихся в прямоугольник (прямоугольное сечение, двутавр и др.),

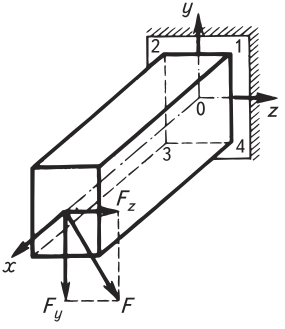


Рис. 5.1

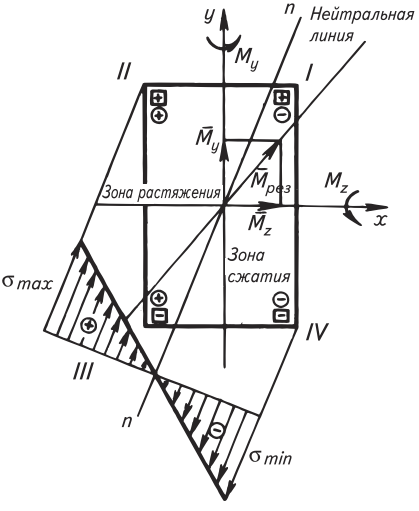


Рис. 5.2

максимальное и минимальное значения нормальных напряжений определяются по формуле

$$\sigma_{\max / \min} = \pm \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right),$$

где W_z, W_y — осевые моменты сопротивления сечения балки.

Для круглого сечения

$$\sigma_{\max / \min} = \pm \frac{M_{\text{рез}}}{W_{\text{ос}}},$$

где $M_{\text{рез}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ — результирующий изгибающий момент в сечении; $W_{\text{ос}}$ — осевой момент сопротивления круглого сечения.

Условие прочности для пластичных материалов составляется по абсолютной величине напряжений: $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$, для хрупких — отдельно для растягивающих и сжимающих напряжений: $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]_{\text{р}}$ и $|\sigma_{\min}| \leqslant [\sigma]_{\text{сж}}$.

При *проверочном расчете* проводится проверка условия прочности по напряжениям или по коэффициентам запаса: $n = \sigma_{\text{оп}}/\sigma_{\max} \leqslant [n]$, где $\sigma_{\text{оп}}$ — опасное напряжение (для пластичных материалов — предел текучести, для хрупких — предел прочности).

Определение размеров сечения (проектный расчет) проводится на основе условия прочности в наиболее опасной точке сечения. Для

двутавра или швеллера подбор сечения проводится по формуле

$$W_z \geqslant \frac{M_z[1 + M_y W_z/(M_z W_y)]}{[\sigma]}.$$

Расчет проводится *методом последовательных приближений.*

Вначале задают отношение моментов сопротивлений W_z/W_y, равное для двутавров 10, для швеллеров 7, так как для различных номеров этих сечений отношение моментов сопротивлений изменяется в довольно широких пределах: для двутавров $W_z/W_y = 6,1 \ldots 14$, для швеллеров $W_z/W_y = 3,3 \ldots 10,4$.

Задача 1. **Для заданной консольной балки (рис. 5.3, *а*) определить напряжения в заделке в точках *1, 2, 3, 4*; определить перемещение свободного конца балки, если заданы** a, F, $h = \dfrac{3}{2}b$, E.

1. Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении. Имеем пространственный косой изгиб (нагрузки действуют в обеих главных плоскостях бруса).

Рассматриваем косой изгиб как совокупность двух прямых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях. Для этого изображаем балку с нагрузкой, действующей в вертикальной (рис. 5.3, *б*) и горизонтальной (рис. 5.3, *в*) плоскостях, и строим эпюры M_z и M_y. Очевидно, опасным сечением будет сечение в заделке, так как здесь действуют максимальные изгибающие моменты.

Изображаем опасное сечение и определяем положение нейтральной линии n—n в этом сечении (рис. 5.3, *г*).

В общем виде уравнение нейтральной линии будет

$$y = \pm \frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y} z.$$

Необходимо установить, какой знак следует оставить в правой части уравнения нейтральной линии.

Указываем в квадрантах сечения знаки напряжений от моментов M_z и M_y (знаки от M_y заключены в кружки). Нейтральная линия пройдет через II и IV квадранты. Тогда I квадрант сечения будет только в зоне растяжения, а III — в зоне сжатия, что соответствует расстановке знаков в сечении. Следовательно уравнение нейтральной линии будет иметь знак минус:

$$y = -\frac{M_z}{M_y} \frac{J_z}{J_y} z.$$

Изгибающие моменты в заделке

$$M_z = 2Fa; \quad M_y = Fa.$$

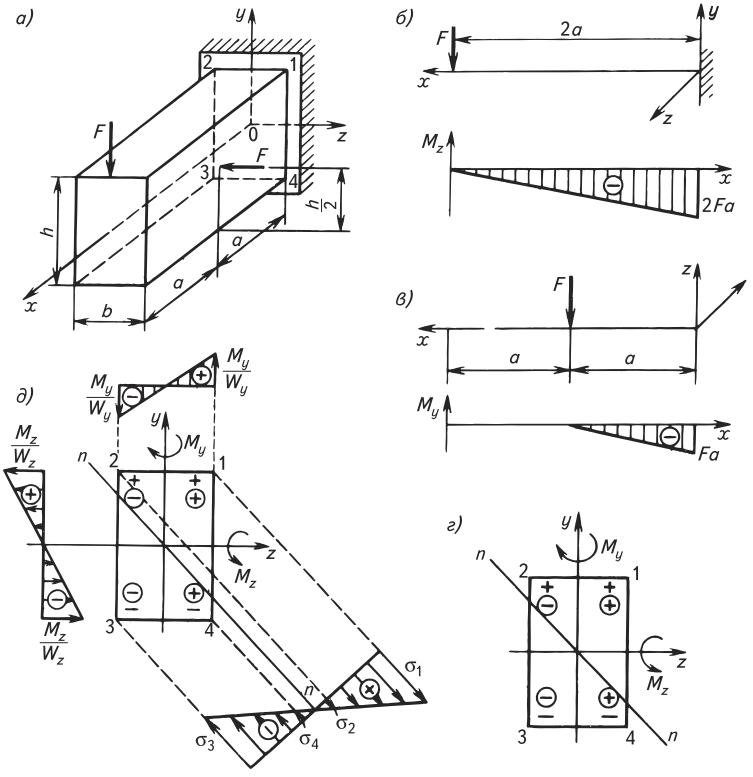


Рис. 5.3

Моменты инерции сечения

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{b}{12}\left(\frac{3}{2}b\right)^3 = \frac{9}{32}b^4;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{3}{2}b \cdot \frac{b^3}{12} = \frac{1}{8}b^4.$$

Моменты сопротивления сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}\left(\frac{3}{2}b\right)^2 = \frac{3}{8}b^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{b^2}{6}\left(\frac{3}{2}b\right) = \frac{1}{4}b^3.$$

Подставляя значения M_z, M_y, J_z, J_y в уравнение нейтральной линии, получим

$$y = -\frac{Fa}{2Fa}\frac{9b^4 8}{32 \cdot 1 \cdot b^4} z.$$

Окончательно имеем

$$y = -\frac{9}{8} z = -1,125z.$$

Угол наклона нейтральной линии к оси

$$\beta_{nn} = \operatorname{arctg}(-9/8) = -48,37^\circ.$$

2. Определяем напряжения в угловых точках сечения заделки (рис. 5.3, *д*) по формуле

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm\frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

Знаки напряжений от моментов в каждом квадранте уже расставлены. Следовательно,

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = +\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{Fa}{b^3}\left(\frac{16}{3} + 4\right) = \frac{28}{3}\frac{Fa}{b^3};$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{Fa}{b^3}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}\frac{Fa}{b^3};$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = -\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{28}{3}\frac{Fa}{b^3};$$

$$\sigma_4 = -\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{Fa}{b^3}\left(-\frac{16}{3} + 4\right) = -\frac{4}{3}\frac{Fa}{b^3}.$$

Эпюра напряжений в сечении заделки представлена на рис. 5.3, *д*.

3. Определяем перемещение свободного конца балки, для чего используем интегралы Мора (рис. 5.4, *а*).

Вертикальная плоскость: $0 \leqslant x \leqslant 2a$; $M_z = -Fx$; $M_{1z} = -1 \cdot x$;

$$EJ_z\delta_{Ay} = \int_0^{2a} M_z M_{1z}\mathrm{d}x = \int_0^{2a} Fx^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}Fa^3;$$

$$\delta_{Ay} = \frac{8Fa^3}{3EJ_z} = \frac{8Fa^3}{3E(9b^4/32)} = \frac{256}{27}\frac{Fa^3}{Eb^4} = 9,48\frac{Fa^3}{Eb^4}.$$

Горизонтальная плоскость (рис. 5.4, *б*):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $M_y = 0$; $M_{1y} = -1 \cdot x_1$;

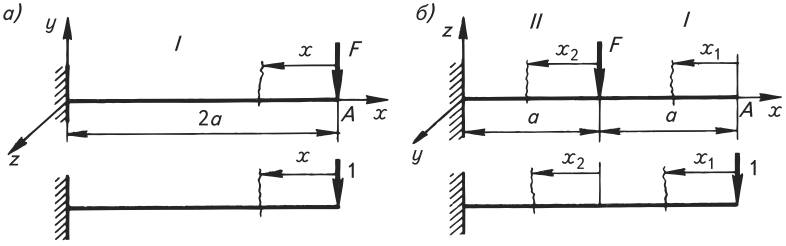


Рис. 5.4

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant a$; $M_y = -Fx_2$; $M_{1y} = -1(a + x_2)$;

$$EJ_y\delta_{Az} = \int_0^a Fx_2(a + x_2)\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}Fa^3 + \frac{1}{3}Fa^3 = \frac{5}{6}Fa^3;$$

$$\delta_{Az} = \frac{5Fa^3}{6EJ_z} = \frac{5Fa^3}{6E(b^4/8)} = \frac{20Fa^3}{3Eb^4} = 6,67\frac{Fa^3}{Eb^4}.$$

Результирующее перемещение

$$\delta_A = \sqrt{\delta_{Ay}^2 + \delta_{Az}^2} = \frac{Fa^3}{Eb^4}\sqrt{9,48^2 + 6,67^2} = 11,6\frac{Fa^3}{Eb^4}.$$

Направление перемещения

$$\beta = \operatorname{arctg}(\delta_{Ay}/\delta_{Az}) = \operatorname{arctg}(9,48/6,67) = 54,87^\circ.$$

Задача 2. **Определить размеры поперечного сечения (прямоугольник, $h = 3b$) двухопорной пространственно нагруженной деревянной балки (рис. 5.5, *а*), если заданы** $q = 10$ **кН/м,** $l = 2$ **м,** $M_0 = \dfrac{1}{16}ql^2 = 2,5$ **кН · м,** $[\sigma] = 10$ **МПа.**

1. Изображаем балку с нагрузкой, действующей в вертикальной (рис. 5.5, *б*) и горизонтальной (рис. 5.5, *в*) плоскостях. Определяем реакции и строим эпюры M_z и M_y.

Изгиб в вертикальной плоскости (рис. 5.5, *б*):
реакции

$$Y_A = Y_B = \frac{1}{2}ql;$$

изгибающий момент

$$M_z = Y_A x - qx\frac{x}{2} = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2;$$

при $x = l/4$ получим $M_z = \dfrac{3}{32}ql^2$;

при $x = l/2$ получим $M_z = \dfrac{4}{32}ql^2 = \dfrac{1}{8}ql^2$.

Строим эпюру M_z.

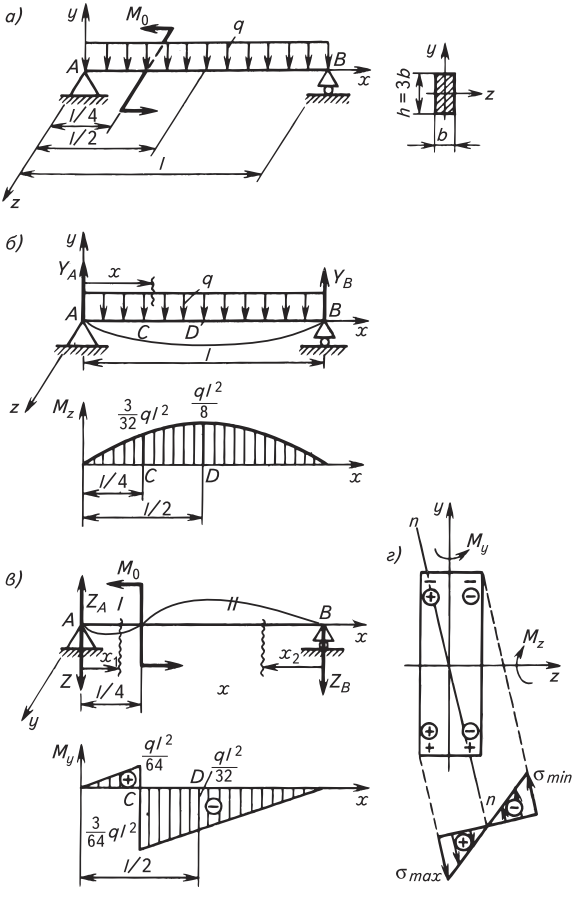


Рис. 5.5

Изгиб в горизонтальной плоскости (рис. 5.5, *в*): реакции

$$Z_A = Z_B = \frac{M_0}{l} = \frac{1}{16}ql;$$

изгибающий момент

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{l}{4}$; $M_y = z_A x_1 = \dfrac{1}{16}qlx_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{3}{4}l$; $M_z = -z_B x_2 = -\dfrac{1}{16}qlx_2$;

при $x_2 = l/2$ получим $M_y = -\dfrac{1}{32}ql^2$.

Строим эпюру M_y.

2. Определяем опасное сечение балки. Наиболее вероятно это будет сечение C или D, в каждом из которых в одной из плоскостей действует максимальный изгибающий момент. Для того чтобы определить, какое сечение является опасным, определим максимальные напряжения в каждом из этих сечений.

Предварительно определим в общем виде моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(3b)^2 = \frac{3}{2}b^3;$$
$$W_y = \frac{hb^2}{6} = (3b)\frac{h^2}{6} = \frac{1}{2}b^3.$$

Сечение C:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3ql^2}{32\left(\frac{3}{2}b^3\right)} + \frac{3ql^2}{64\left(\frac{1}{2}b^3\right)} = \frac{5}{32}\frac{ql^2}{b^3} = 0,156\frac{ql^2}{b^3}.$$

Сечение D:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{ql^2}{8\left(\frac{3}{2}b^3\right)} + \frac{ql^2}{32\left(\frac{1}{2}b^3\right)} = \frac{7}{48}\frac{ql^2}{b^3} = 0,146\frac{ql^2}{b^3}.$$

Опасным оказалось сечение C.

3. Определяем размеры поперечного сечения. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{5ql^2}{32b^3} \leqslant [\sigma],$$

откуда $b \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{5ql^2}{32[\sigma]}} = \sqrt[3]{\dfrac{5 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{32 \cdot 10,0 \cdot 10^6}} = 0,0855$ м $= 85,5$ мм.

По ГОСТ 6639–69 ($Ra20$) принимаем $b_{\text{н}} = 90$ мм (см. Приложение 1). Тогда высота сечения $h_{\text{н}} = 3b_{\text{н}} = 270$ мм. Определим недогрузку опасного сечения балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{5ql^2}{32b_{\text{н}}^3} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{32 \cdot 0,09^3} = 8,6 \text{ МПа};$$
$$\Delta_\sigma = \frac{\sigma - \sigma_{\max}}{[\sigma]}100\% = \frac{10 - 8,6}{10}100\% = 14\%,$$

что допустимо.

4. Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении балки и строим эпюру σ. Для определения положения нейтральной линии расставляем знаки напряжений от M_z и M_y (в кружочке) (рис. 5.5, *г*). Знаки напряжений в этой задаче лучше определять по виду изогнутой оси балки. В сечении C рассматриваем изогнутую ось в зоне действия бóльшего момента (по абсолютной величине).

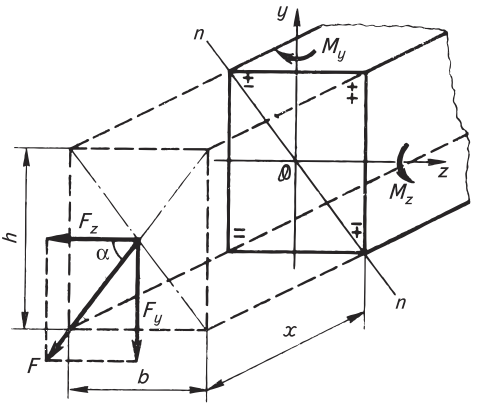


Рис. 5.6

Уравнение нейтральной линии

$$y = -\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}.$$

Осевые моменты инерции сечения

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(3b)^3}{12} = \frac{9}{4}b^4; \quad J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{3bb^3}{12} = \frac{1}{4}b^4.$$

Тогда

$$y = -\frac{(3/64)ql^2}{(3/32)ql^2} \cdot \frac{(9/4)b^4}{(1/4)b^4}z = -\frac{9}{2}z,$$

или $y = -4,5z$.

Проводим нейтральную линию и строим эпюру σ в общем виде.

Задача 3. **Какое положение займет нейтральная линия в балке прямоугольного поперечного сечения, если плоскость действия нагрузки будет совпадать с одной из диагональных плоскостей (рис. 5.6)?**

Уравнение нейтральной линии

$$y = \pm\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}z.$$

Из картины распределения знаков напряжений от M_z и M_y (рис. 5.6) видно, что нейтральная линия может пройти только через II и IV квадранты; следовательно, знак — минус.

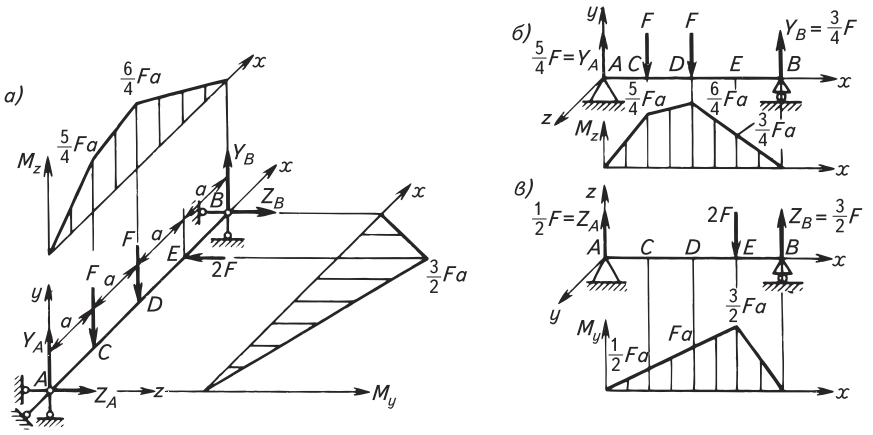


Рис. 5.7

Записываем выражения для изгибающих моментов в произвольном сечении на расстоянии x и моментов инерции сечений:

$$M_y = F_z x = F\cos\alpha \cdot x; \quad J_y = b^3 h/12;$$
$$M_z = F_y x = F\sin\alpha \cdot x; \quad J_z = bh^3/12.$$

Подставляем эти выражения в уравнение нейтральной линии

$$y = -\frac{F\cos\alpha \cdot x}{F\sin\alpha \cdot x}\,\frac{bh^3 12}{12hb^3} z = -\operatorname{ctg}\alpha \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot z = -\frac{h}{b} z.$$

Проводим нейтральную линию n—n в сечении (рис. 5.6).

Уравнение прямых, проходящих через диагонали,

$$y = \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot z = \pm \frac{h}{b} z.$$

Таким образом, нейтральная линия лежит в другой диагональной плоскости.

Задача 4. **Балка круглого сечения диаметром** $d = 28$ мм **испытывает изгиб в двух плоскостях (рис. 5.7, *а*). Определить коэффициент запаса, если заданы** $a = 0{,}2$ м, $F = 6$ кН, **предел текучести материала (сталь)** $\sigma_т = 300$ МПа.

1. Нагрузка, вызывающая изгиб балки в вертикальной плоскости yOx, и эпюры изгибающих моментов M_z представлены на рис. 5.7, *б*.

2. Нагрузка, вызывающая изгиб балки в горизонтальной плоскости xOz, и эпюры изгибающих моментов M_y представлены на рис. 5.7, *в*.

Для наглядности на рис. 5.7, *а* представлены пространственные эпюры изгибающих моментов.

3. Определяем опасное сечение. Результирующий изгибающий момент:

$$\text{в сечении } C\ M_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}Fa\right)^2 + \left(\frac{1}{2}Fa\right)^2} = 1,35Fa;$$

$$\text{в сечении } D\ M_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{6}{4}Fa\right)^2 + (Fa)^2} = 1,8Fa;$$

$$\text{в сечении } E\ M_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}Fa\right)^2 + \left(\frac{3}{2}Fa\right)^2} = 1,68Fa.$$

Опасное сечение — сечение D: $\max M_{\text{рез}} = 1,8Fa$.

4. Определяем коэффициент запаса. Максимальное напряжение в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{\text{рез}}}{W_{\text{ос}}} = \frac{1,8Fa}{0,1d^3} = \frac{18Fa}{d^3}.$$

Коэффициент запаса

$$n = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{\text{т}} d^3}{18Fa} = \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 0,05^3}{18 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0,2} = 1,74.$$

Коэффициент запаса соответствует рекомендуемым значениям для пластичных материалов $[n] = 1,4 \ldots 2,0$.

Задача 5. **В консольной деревянной балке (рис. 5.8) прямоугольного сечения $b \times h$ определить напряжения в угловых точках заделки, если заданы $F = 2,4$ кН, $h = 0,2$ м, $b = 0,12$ м, $l = 2$ м, $\varphi = 30°$.**

Ответ.

$\sigma_{A/C} = \pm 0,2$ МПа; $\quad \sigma_{B/D} = \pm 10,2$ МПа.

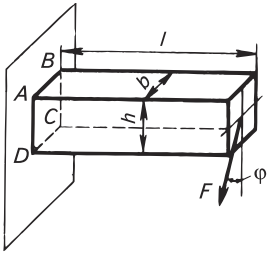


Рис. 5.8

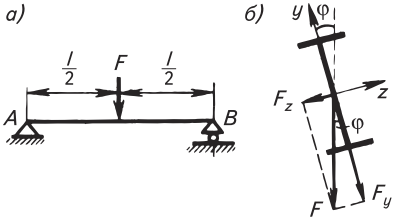


Рис. 5.9

Задача 6. **При установке двутавровой балки на опоры (рис. 5.9, *а*) стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол φ (рис. 5.9, *б*). На сколько увеличатся максимальное напряжение и прогиб?**

Ответ. Независимо от нагрузки и длины напряжение увеличится в $k_\sigma = \cos\varphi + (W_z/W_y)\sin\varphi$ раз, полный прогиб увеличится в $k_\delta = \sqrt{\cos^2\varphi + [(J_z/J_y)\sin\varphi]^2}$ раз.

5.2. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ). ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

В случае совместного действия изгиба и растяжения (сжатия) в произвольном поперечном сечении бруса действуют пять внутренних силовых факторов: *продольная сила* N, *изгибающие моменты* M_x и M_y, *поперечные силы* Q_y и Q_z. В большинстве случаев влияние поперечных сил пренебрежимо мало.

При одновременном действии на брус растягивающей (сжимающей) силы N и изгибающих моментов M_x, M_y в сечении возникают *нормальные напряжения*, которые могут быть определены как алгебраическая сумма напряжений от каждого компонента нагрузки:

$$\sigma_{(x,\,y,\,z)} = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y) = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{J_z}y \pm \frac{M_y}{J_y}z.$$

Для определения положения опасного сечения следует построить эпюры N, M_y, M_z. *Опасным* будет сечение, в котором возникают наибольшие нормальные напряжения.

Уравнение нейтральной линии $\sigma = 0$, откуда получим уравнение прямой, не проходящей через начало координат:

$$y = \pm\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}z \pm \frac{NJ_z}{M_zA}.$$

Знаки в уравнении нейтральной линии определяются исходя из распределения знаков напряжений по сечению от каждого компонента нагрузки.

На рис. 5.10 в качестве примера приведены знаки напряжений: от M_z — знаки обычные, от M_y — знаки, заключенные в кружки, от N — знаки в квадратиках. Нейтральная линия может пройти только через II, III и IV квадранты и в уравнении будут знаки минус:

$$y = -\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}z - \frac{NJ_z}{M_zA}.$$

Наибольшие напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной линии точках.

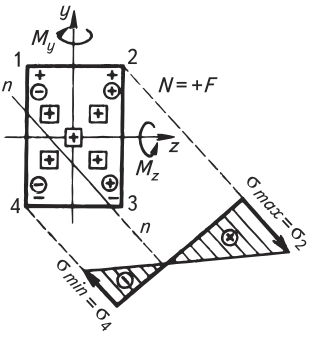


Рис. 5.10

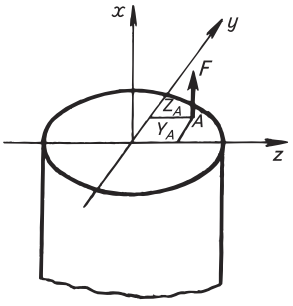


Рис. 5.11

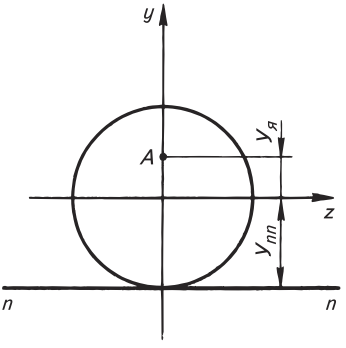


Рис. 5.12

Для брусьев с симметричным поперечным сечением, вписывающихся в прямоугольник (двутавр, прямоугольник и некоторые другие сечения), максимальное и минимальное напряжения

$$\sigma_{\max / \min} = \frac{N}{A} \pm \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right).$$

Для брусьев круглого сечения

$$\sigma_{\max / \min} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{\text{рез}}}{W_{\text{ос}}},$$

где $M_{\text{рез}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$.

Расчет на прочность проводится аналогично, как и при косом изгибе.

При определении *размеров сечения* (проектный расчет) в первом приближении напряжением от продольного усилия $\sigma(N) = N/A$ пре-

небрегают, но проверка на прочность сечения проводится с учетом этого напряжения.

Часто продольная нагрузка бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения бруса, а с некоторым смещением (эксцентриситетом) относительно главных центральных осей инерции сечения (рис. 5.11). Тогда в любом поперечном сечении бруса будут возникать продольная сила $N = F$ и изгибающие моменты $M_z = Fy_A$, $M_y = Fz_A$, где y_A, z_A — координаты точки приложения силы.

Таким образом, *внецентренное растяжение* (сжатие) приводится к центральному растяжению (сжатию) и изгибу в двух плоскостях.

При внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная линия может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами.

Ядро сечений — некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложенная продольная растягивающая (сжимающая) сила вызывает во всех точках сечения напряжения только одного знака.

Когда точка приложения силы находится на границе ядра сечения, нейтральная линия касается контура сечения.

Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии)

$$-\frac{yy_A}{i_z^2} - \frac{zz_A}{i_y^2} = 1,$$

где i_z, i_y — радиусы инерции сечения ($i_{z/y} = \sqrt{J_{z/y}/A}$).

Для построения ядра сечения необходимо знать следующее:

1) при повороте нейтральной линии вокруг какой-либо точки сечения точка приложения силы перемещается по прямой;

2) если нейтральная линия касательна к сечению и перпендикулярна одной из главных центральных осей инерции сечения, то точка приложения силы находится на этой оси и ее координата определяется по формуле

$$y_я = -i_z^2/y_{nn} \quad \text{или} \quad z_я = -i_y^2/z_{nn},$$

где y_{nn}, z_{nn} — координаты нейтральной линии (рис. 5.12).

Задача 1. **Кирпичный столб квадратного поперечного сечения $a \times a = 1 \times 1$ м, высотой $l = 5$ м (рис. 5.13, *а*), нагружен своим собственным весом и поперечным равномерно распределенным давлением ветра, равным $p = 800$ Н/м^2. Удельная масса кладки $\rho = 1,6$ т/м^3. Определить наибольшее и наименьшее сжимающие напряжения в основании столба.**

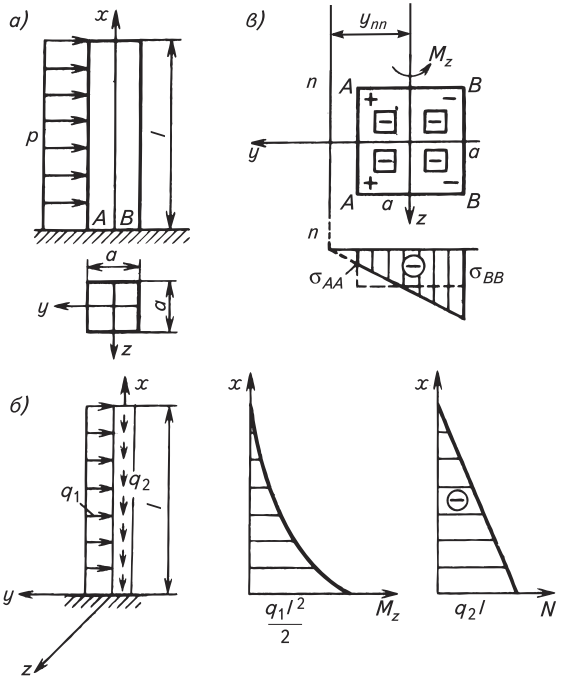


Рис. 5.13

1. Столб нагружен равномерно распределенной нагрузкой от давления ветра и собственного веса. Определим интенсивность нагрузки q_1 от ветра и q_2 от веса:

$$q_1 = \frac{pal}{l} = \frac{800 \cdot 1 \cdot 5}{5} = 800 \text{ Н/м} = 0{,}8 \text{ кН/м} — \text{ветровая нагрузка на 1 м длины столба;}$$

$$q_2 = \frac{g\rho a^2 l}{l} = \frac{10 \cdot 1{,}6 \cdot 1^2 \cdot 5}{5} = 16 \text{ кН/м} — \text{вес 1 м длины столба.}$$

Здесь принято $g \simeq 10$ м/с^2.

2. Изобразим схему нагрузки столба и построим эпюры изгибающего момента M_z и нормального усилия N (рис. 5.13, *б*).

3. Опасное сечение — заделка, в которой возникают наибольшие значения M_z и N:

$$\max M_z = \frac{1}{2} q_1 l^2; \quad \max N = q_2 l.$$

Определим знаки напряжений по квадрантам опасного сечения — заделки (рис. 5.13, *в*).

Очевидно, для квадратного сечения

$$J_z = J_y = a^4/12; \quad W_z = W_y = a^3/6.$$

Напряжения на сторонах:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{AA}; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{BB};$$

$$\sigma_{\max/\min} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} = -\frac{q_2 l}{a^2} \pm \frac{q_1 l^2 6}{2a^3} =$$

$$= -\frac{16 \cdot 5}{1} \pm \frac{0{,}8 \cdot 5^2 6}{2 \cdot 1} = (-80 \pm 60) \text{ КПа};$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{AA} = -80 + 60 = -20 \text{ КПа};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{BB} = -80 - 60 = -140 \text{ КПа}.$$

4. Построим нейтральную линию.

Уравнение нейтральной линии $\sigma = 0$, откуда

$$-\frac{M_z}{J_z} y_{nn} - \frac{N}{A} = 0 \Rightarrow y_{nn} = \frac{N}{M_z}\frac{J_z}{A} = \frac{q_2 l a^4/12}{(q_1 l^2/2)a^2} = \frac{q_2 a^2}{6 q_1 l},$$

или

$$y_{nn} = \frac{q_2 a^2}{6 q_1 l} = \frac{16 \cdot 1^2}{6 \cdot 0{,}8 \cdot 5} = \frac{2}{3} \text{ м},$$

т. е. нейтральная линия проходит вне сечения (рис. 5.13, *в*).

Задача 2. **Для двутавровой балки № 14 ($W_z = 81{,}7$ см^3, $W_y = 11{,}5$ см^3, $J_z = 572$ см^4, $A = 17{,}4$ см^2, $J_y = 41{,}9$ см^4) на двух опорах, нагруженной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 5.14, *а*), определить коэффициент запаса по текучести, если заданы предел текучести $\sigma_т = 250$ МПа, $a = 1$ м, $F = 10$ кН, $M_0 = (1/10)Fa = 1$ кН $\cdot$ м.**

1. На рис. 5.14, *а* опора A имеет возможность перемещаться вдоль оси бруса — скользящая шарнирная опора, опора B не имеет возможности линейных перемещений — жесткая шарнирная опора. Рассмотрим отдельно нагрузку, изгибающую балку в вертикальной (рис. 5.14, *б*) и горизонтальной плоскостях (рис. 5.14, *в*) и вызывающую растяжение (рис. 5.14, *г*).

2. Строим эпюры M_z (вертикальная плоскость) (рис. 5.14, *б*), M_y (горизонтальная плоскость) (рис. 5.14, *в*) и N (рис. 5.14, *г*), предварительно определив реакции опор:

$$Y_A = Y_B = F/2; \quad Z_A = Z_B = M_0/(2a).$$

Анализ эпюр показывает, что наиболее нагруженными являются сечения C и B:

в сечении B

$$M_z = 0; \quad M_y = \frac{1}{10} Fa = 1 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad N = 5F = 50 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

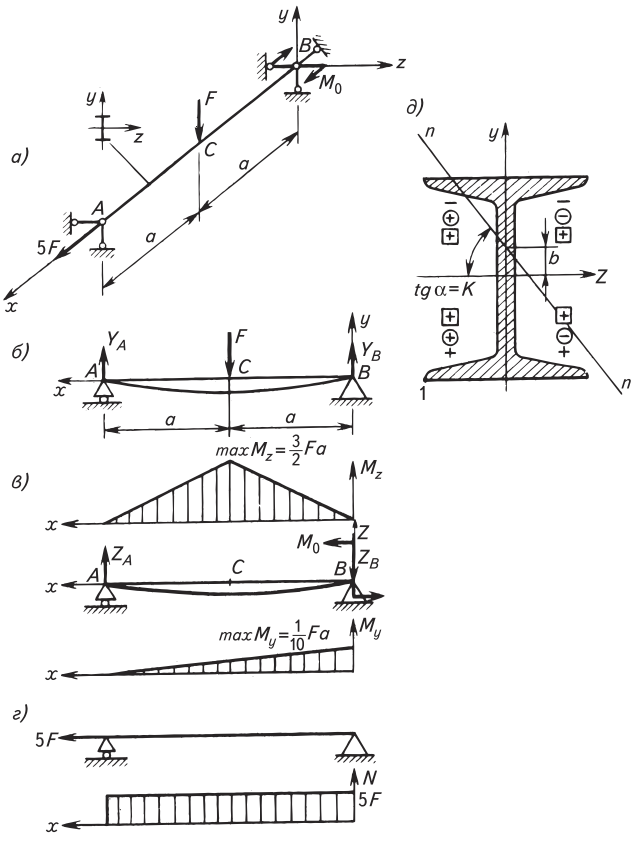


Рис. 5.14

в сечении C

$$M_z = \frac{1}{2}Fa = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м};\ M_y = \frac{1}{20}Fa = 0{,}5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$N = 5F = 50 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

3. Расчет на прочность — определение коэффициента запаса. Опасным сечением будет то, в котором действуют максимальные нормальные напряжения:

в сечении B

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{50 \cdot 10^3}{17{,}4 \cdot 10^{-4}} + \frac{1 \cdot 10^3}{11{,}5 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 28{,}74 + 86{,}96 = 115{,}7 \text{ МПа},$$

в сечении C

$$\sigma_{\max}=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{W_z}+\frac{M_y}{W_y}=\frac{50\cdot10^3}{17,4\cdot10^{-4}}+\frac{5\cdot10^3}{81,7\cdot10^{-6}}+\frac{0,5\cdot10^3}{11,5\cdot10^{-6}}=$$
$$=28,74+61,2+43,48=133,4\text{ МПа}.$$

Таким образом, опасным является сечение C, в котором возникает максимальное напряжение $\sigma_{\max}=133,4$ МПа.

Коэффициент запаса

$$n=\frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\max}}=\frac{250}{133,4}=1,87.$$

4. Определим положение наиболее нагруженной точки. Рассмотрим картину нагружения сечения C (рис. 5.14, *д*). В вертикальной плоскости балка от действия силы F прогибается вниз (как показано на рис. 5.14, *б*), при этом верхняя половина сечения испытывает сжатие, нижняя — растяжение. Ставим в верхних квадрантах сечения два минуса, в нижних — два плюса.

В горизонтальной плоскости балка прогибается влево, в сторону, противоположную направлению оси z (как показано на рис. 5.14, *в*). При этом левая половина сечения, которая расположена в зоне отрицательных значений z, будет испытывать растяжение, а правая — сжатие. Ставим соответственно плюсы и минусы (в кружочке). От растягивающей силы во всех точках сечения действуют растягивающие нормальные напряжения. Ставим во всех квадрантах знаки плюс в квадратике. Таким образом, нейтральная линия пройдет через I, II и IV квадранты, оставив III квадрант полностью в зоне растяжения.

Уравнение такой прямой $y=-kz+b$.

Уравнение нейтральной линии

$$y=-\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}z+\frac{NJ_z}{M_zA}.$$

Подставив A, N, M_z, J_z, J_y, получаем

$$y=\frac{0,5\cdot10^3\cdot572\cdot10^{-8}}{5\cdot10^3\cdot41\cdot9\cdot10^{-8}}z+\frac{50\cdot10^3\cdot572\cdot10^{-8}}{5\cdot10^3\cdot17,4\cdot10^{-4}}=-1,365z+3,29.$$

Проводим нейтральную линию n—n. Наиболее удаленная точка — точка *1* — и будет наиболее нагруженной точкой опасного сечения, в которой $\sigma_{\max}=133,4$ МПа.

Задача 3. **Найти ядро сечения для поперечного сечения цокольной части заводской трубы, если заданы** $a=80$ см, $d=54$ см **(рис. 5.15).**

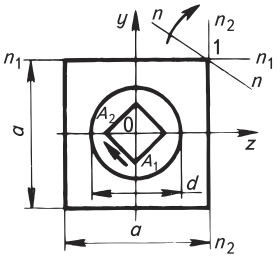


Рис. 5.15

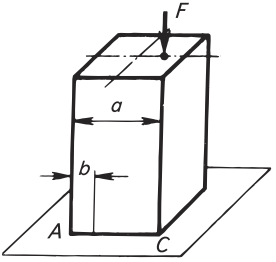


Рис. 5.16

В силу симметрии сечения инерции i_z и i_y равны между собой. Определим их:

$$i^2 = \frac{J}{A} = \frac{a^4/12 - \pi d^4/64}{a^2 - \pi d^2/4} = \frac{80^4/12 - 3,14 \cdot 54^2/64}{80^2 - 3,14 \cdot 54^2/4} = 730 \text{ см}^2.$$

Если нейтральная линия занимает положение n_1—n_1, то, следовательно, изгиб происходит только в плоскости xOy и тогда координата точки A_1 приложения силы

$$y_{A_1} = -i^2/y_{nn} = -730/40 = -18,25 \text{ см}.$$

Если нейтральная линия занимает положение n_2—n_2, то, следовательно, изгиб происходит только в плоскости xOz и тогда координаты точки A_2 приложения силы

$$z_{A_2} = -i^2/z_{nn} = -730/40 = -18,25 \text{ см}.$$

При переходе нейтральной линии от положения n_1—n_1 в положение n_2—n_2, т. е. поворота вокруг точки *1*, точка приложения силы будет перемещаться по прямой A_1—A_2.

Следовательно, ядро сечения — равносторонний ромб, вершины которого расположены на осях y и z.

Задача 4. **Столб испытывает внецентренное сжатие (рис. 5.16). Определить напряжение в точке C, если заданы $a = 0,4$ м, $b = 0,1$ м, $\sigma_A = 20$ МПа, $\sigma_B = 0$.**

Ответ. $\sigma_C = -60$ МПа.

Задача 5. **Бетонный столб (рис. 5.17) испытывает внецентренное сжатие. Проверить на прочность нижнюю часть столба, если заданы $F = 600$ кН, $a = 0,4$ м, $b = 0,18$ м, $c = 0,05$ м. Допускаемые напряжения: на сжатие $[\sigma]_C = 7$ МПа, на растяжение $[\sigma]_\text{р} = 0,6$ ПМа.**

Ответ. $\max\sigma = 0,58$ МПа $< [\sigma]_\text{р}$, $\min\sigma = 0,92$ МПа $< [\sigma]_C$.

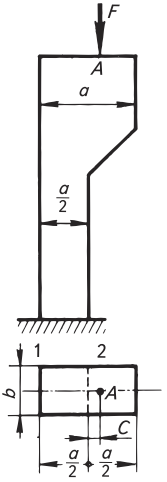


Рис. 5.17

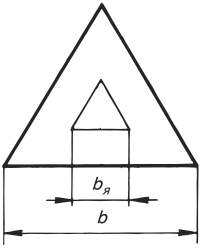


Рис. 5.18

Задача 6. **Построить ядро сечения, если сечение — равносторонний треугольник со стороной** b **(рис. 5.18).**

Ответ. Ядро — равносторонний треугольник, подобный сечению, со стороной $b_{\text{н}} = 3b/(16\cos 30^\circ) = 0,217b$.

5.3. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

При совместном действии изгиба и кручения в поперечных сечениях действуют *пять* внутренних силовых факторов: *изгибающие моменты* M_z и M_y, *крутящий момент* T и *поперечные силы* Q_y и Q_z. Детали, работающие на совместное действие кручения и изгиба, — это чаще всего валы различных машин. При расчете на прочность, пользуясь принципом независимости действия сил, определяют отдельно *касательные напряжения, возникающие в брусе при кручении,* и отдельно *нормальные напряжения, возникающие в брусе при изгибе* (как и раньше, пренебрегаем касательными напряжениями при изгибе). При совместном действии нормальных и касательных напряжений имеем плоское напряженное состояние и для проверки прочности необходимо применить одну из теорий прочности.

Для круглого поперечного сечения (сплошного или кольцевого) *эквивалентные напряжения* могут быть определены по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = M_{\text{расч}}/W_{\text{ос}},$$

где $M_{\text{расч}}$ — расчетный или эквивалентный момент;

$W_{\text{ос}} = \dfrac{\pi d^3}{32}(1-\alpha^4)$ — осевой момент сопротивления сечения.

По третьей теории прочности (критерий — наибольшие касательные напряжения),

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{T^2 + M_z^2 + M_y^2}.$$

По четвертой теории прочности (критерий — энергия изменения формы),

$$M_{\text{расчIV}} = \sqrt{0,75T^2 + M_z^2 + M_y^2}.$$

Расчет бруса круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения ведется как бы на прямой изгиб, но в расчетной формуле роль изгибающего момента играет расчетный момент.

Условие прочности $\max \sigma_{\text{экв}} \leqslant [\sigma]$.

Деформации (прогибы и углы закручивания) определяются независимо при расчете на изгиб и кручение. Вышеуказанный расчет вала проводится для статических нагрузок. В большинстве случаев на вал действуют циклические нагрузки, поэтому вал необходимо рассчитывать на выносливость.

Задача 1. **Ведомый вал цилиндрического прямозубого редуктора (рис. 5.19, *а*) передает вращение на цепную передачу. Диаметр зубчатого колеса** $D = 331,5$ мм**, диаметр цепной звездочки** $D_{\text{ц}} = 256$ мм**. Окружное усилие на зубчатом колесе** $F_t = 3,75$ кН**, радиальное усилие** $F_r = 1,36$ кН**. Определить окружное усилие на звездочке** $F_{\text{ц}}$**, диаметр вала в опасном сечении по третьей теории прочности, если заданы** $a = 85$ мм**, допускаемое напряжение материала вала (сталь 45)** $[\sigma] = 200$ МПа**.**

1. Для того чтобы расчеты проводить в буквенных выражениях, принимаем $D_{\text{ц}} = 3a$, $D = 3,9a$, $F = 1$ кН, тогда $F_t = 3,75F$, $F_r = 1,36F$.

Приводим силы F_t и $F_{\text{ц}}$ к центру тяжести сечения вала. Тогда получим скручивающие моменты $M(F_t) = F_t \dfrac{D}{2}$ и $M(F_{\text{ц}}) = F_{\text{ц}} \dfrac{D_{\text{ц}}}{2}$ и горизонтальные силы F_t и $F_{\text{ц}}$, приложенные в центре тяжести сечения вала. При равномерном вращении вала сумма моментов, действующих на вал, должна быть равна нулю:

$$\sum M_x = F_{\text{ц}} \frac{D_{\text{ц}}}{2} - F_t \frac{D}{2} = 0,$$

откуда окружное усилие на звездочке

$$F_{\text{ц}} = F_t \frac{D}{D_{\text{ц}}} = 4,875F_t.$$

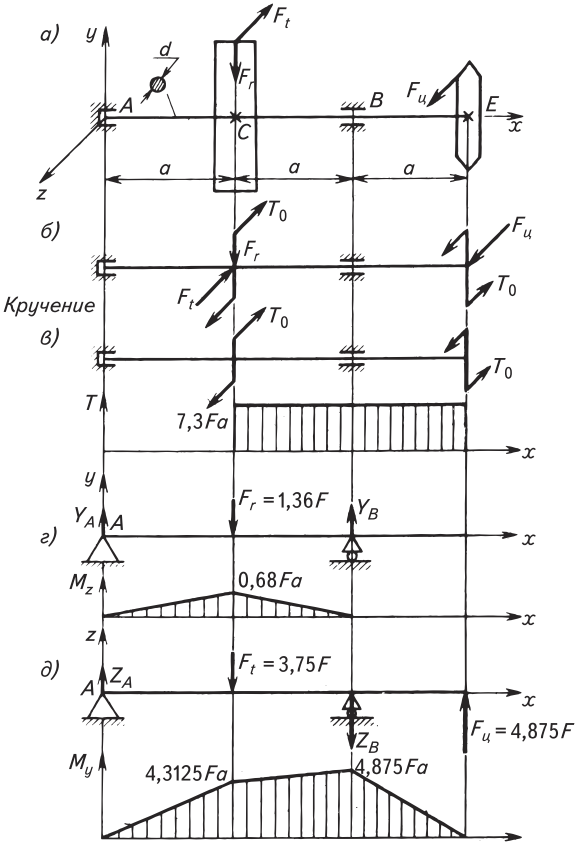


Рис. 5.19

Обозначим скручивающие сосредоточенные моменты в сечениях C и E через T_0, тогда

$$T_0 = F_t \frac{D}{2} = F_ц \frac{D_ц}{2} = 7,3Fa.$$

2. Схема нагрузки вала сосредоточенными силами и моментами (рис. 5.19, *б*) показывает, что вал работает на изгиб в вертикальной плоскости, изгиб в горизонтальной плоскости и кручение. Рассмотрим каждую деформацию отдельно, пользуясь принципом независимости действия сил.

Кручение (рис. 5.19, *в*). Вал нагружен двумя сосредоточенными моментами, которые вызывают кручение вала на участке от сечения C до сечения E. Строим эпюру крутящих моментов.

Изгиб в вертикальной плоскости xOy (рис. 5.19, *г*). Вал нагружен силой F_2. Реакции опор из симметрии нагружения

$$Y_A = Y_B = F_r/2 = 0,68F.$$

Строим эпюру M_z.

Изгиб в горизонтальной плоскости xOz (рис. 5.19, *д*). Вал нагружен силами F_t и $F_{\text{ц}}$. Реакции опор определим из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 4,875F3a - Z_B 2a - 3,75Fa = 0 \Rightarrow Z_B = 5,4375F;$$
$$\sum M_B = -Z_A 2a + 3,75Fa + 4,875Fa = 0 \Rightarrow Z_A = 4,3125F.$$

Строим эпюру M_y.

3. Определяем опасное сечение и диаметр вала. Анализ эпюр показывает, что опасными могут быть сечения C и E. Определим расчетный момент в этих сечениях:

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{T^2 + M_z^2 + M_y^2},$$

в сечении C

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{(7,3Fa)^2 + (0,68Fa)^2 + (4,3125)^2} = 8,51Fa,$$

в сечении E

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{(7,3Fa)^2 + 0 + (4,875)^2} = 8,78Fa.$$

Таким образом, опасным сечением является сечение E с $M_{\text{расч}} = 8,78Fa$.

Из условия прочности определяем диаметр вала:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{\max M_{\text{расч}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8,78Fa}{0,1[\sigma]}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{8,78 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,085}{0,1 \cdot 200 \cdot 10^6}} = 0,0334 \text{ м} = 33,4 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—89 из ряда $Ra40$ выбираем $d_{\text{н}} = 34$ мм (см. Приложение 1).

Определяем недогрузку:

$$\sigma_{\max} = \frac{8,78Fa}{0,1d_{\text{н}}^3} = \frac{8,78 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,085}{0,1 \cdot 0,034^3} = 189,9 \text{ МПа};$$
$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{200 - 189,9}{200} 100\% = 5,05\%.$$

Таким образом, диаметр вала подобран правильно.

Задача 2. **Определить по третьей теории прочности диаметр вала, передающего вращение от одной ременной передачи к двум другим (рис. 5.20, *а*), если заданы натяжение ремней** $F_1 = F_2 = 1500$ Н**, диаметры шкивов** $D_1 = D_2 = 300$ мм**,** $D_3 = 450$ мм**, расстояние** $a = 20$ см**, допускаемое напряжение** $[\sigma] = 160$ МПа**.**

1. Определим скручивающие сосредоточенные моменты. Усилия от натяжения ремней приводим к центру тяжести вала (рис. 5.20, *б*). В результате приведения получаем скручивающий сосредоточенный момент M_0 и равнодействующую $R = 3F_1$.

В сечениях H и K моменты одинаковы:

$$M_0 = (2F_1 - F_1)\frac{D_1}{2} = (2 \cdot 1500 - 1500)\frac{0,3}{2} = 225 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Определяем натяжение ремня F_3 на ведущем шкиве. Из условия равенства суммы моментов на валу нулю имеем

$$\sum M_x = M_0' + M_0'' - M_0''' = 0 \Rightarrow M_0''' = 2M_0,$$

откуда

$$F_3 = 2M_0/(D_3/2) = 2 \cdot 225/(0,45/2) = 2000 \text{ Н}.$$

3. Представляем расчетную схему вала (рис. 5.20, *в*). Выделяем нагрузки, вызывающие кручение вала (рис. 5.20, *г*), изгиб в вертикальной плоскости (рис. 5.20, *д*), изгиб в горизонтальной плоскости (рис. 5.20, *е*).

Кручение. Строим эпюру T. Максимальный крутящий момент в сечениях участка KC

$$\max T = 2M_0 = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Изгиб в вертикальной плоскости. Определяем реакции Y_A и Y_B:

$$\sum M_A = -Y_B 4a + S_2 3a - S_1 a = 0 \Rightarrow Y_A = Y_B = 2250 \text{ Н}.$$

Строим эпюру M_z. В сечениях H и K максимальный изгибающий момент $\max|M_z| = Y_A a = 2250 \cdot 0,2 = 450$ Н $\cdot$ м.

Изгиб в горизонтальной плоскости. Определяем реакции z_A и z_B:

$$\sum M_A = Z_B 4a - S_3 5a = 0 \Rightarrow Z_B = 7500 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = Z_A 4a - S_3 a = 0 \Rightarrow Z_A = 1500 \text{ Н}.$$

Строим эпюру M_y. В сечении B максимальный изгибающий момент $\max|M_y| = S_3 a = 6000 \cdot 0,2 = 1200$ Н $\cdot$ м.

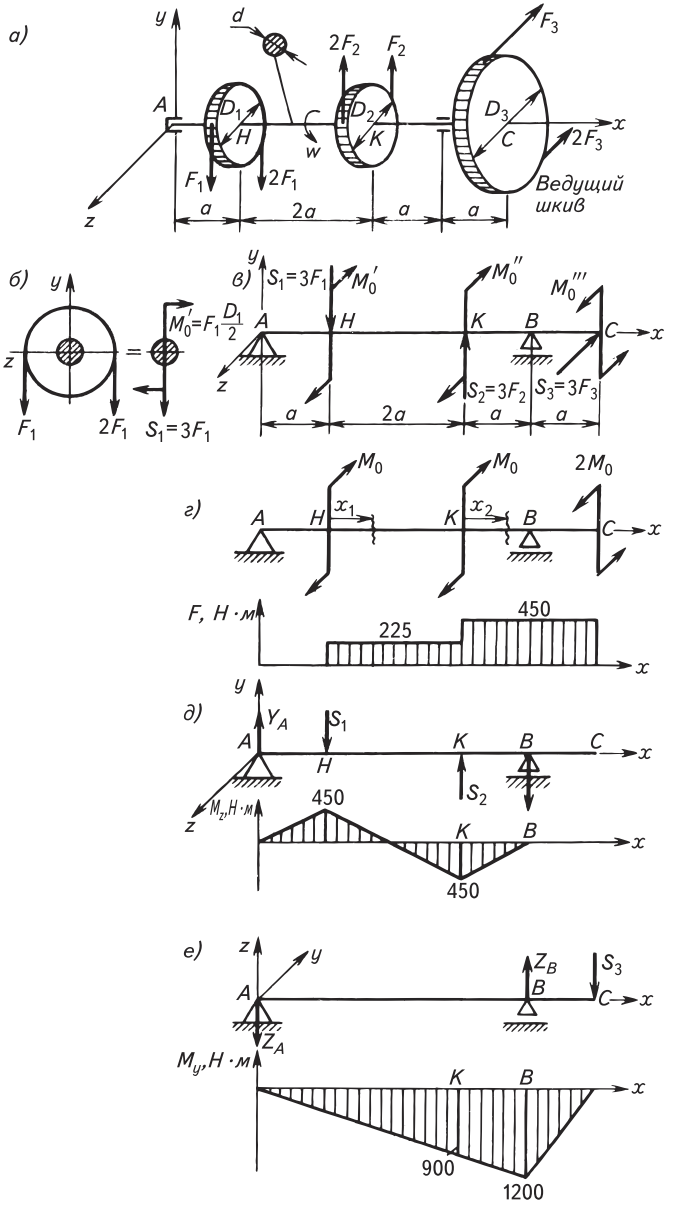

а)
y
d
2F2
F2
F3
A
D1
H
C
w
D2
K
D3
C
2F3
x
F1
2F1
Ведущий
шкив
z
a
2a
a
a
б)
y
M0'=F1 D1/2
z
F1
2F1
S1=3F1
в)
y
S1=3F1
M0'
M0''
M0'''
A
H
K
B
C
x
z
S2=3F2
S3=3F3
a
2a
a
a
г)
M0
M0
2M0
A
H
x1
K
x2
B
C
x
F, Н·м
450
225
x
д)
y
YA
S1
A
H
K
B
C
x
S2
z
Mz, Н·м
450
K
B
x
450
е)
z
y
ZB
S3
A
B
C
x
ZA
My, Н·м
K
B
x
900
1200

Рис. 5.20

4. Определяем опасное сечение, диаметр вала:

сечение K $M_{\text{расчIII}} = \sqrt{450^2 + 900^2 + 450^2} = 1102$ Н $\cdot$ м;

сечение B $M_{\text{расчIII}} = \sqrt{1200^2 + 450^2} = 1280$ Н $\cdot$ м.

Опасное сечение — сечение B.

Определяем диаметр вала d:

$$\sigma_{\max} = \max M_{\text{расч}}/W_{\text{ос}} \leqslant [\sigma],$$

откуда $d \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{\max M_{\text{расч}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\dfrac{1280}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,043$ м $= 43$ мм.

По ГОСТ 6636—69 из ряда $Ra20$ выбираем $d_{\text{н}} = 45$ мм (см. Приложение 1).

Определяем недогрузку:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{\text{расч}}}{0,1 d_{\text{н}}^3} = \frac{1280}{0,1 \cdot 0,045^3} = 140 \text{ МПа};$$

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{160 - 140}{160} 100\% = 12,5\%.$$

Недогрузка не превышает предельно рекомендуемого значения 15%.

Задача 3. **Определить диаметр вала цилиндрического косозубого редуктора (рис. 5.21, *а*) в опасном сечении по третьей теории прочности, если заданы передаваемый крутящий момент** $M = 1,5$ кН·м**, диаметр** $D_1 = 150$ мм**,** $D_2 = 375$ мм**, расстояние** $l = 80$ мм**,** $b = 70$ мм**,** $c = 100$ мм**, допускаемое напряжение для материала (сталь) вала** $[\sigma] = 180$ МПа**. Принять** $F_r = 0,36F_t$ **и** $F_a = 0,2F_t$**. Влиянием продольных и поперечных сил пренебречь.**

1. Все исходные данные приведены в цифровых значениях. Переводим их в буквенные. Примем $a = 100$ мм $= 0,1$ м, тогда $l = 0,8a$, $b = 0,7a$, $c = a$, $D_1 = 1,5a$, $D_2 = 3,75a$.

Определим окружные силы, действующие на зубчатые колеса:

$$F_{t1} = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,15} = 20 \text{ кН}; \quad F_{t2} = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,375} = 8 \text{ кН}.$$

Примем $F = 10$ кН, тогда $F_{t1} = 2F$, $F_{t2} = 0,8F$.

Радиальные силы $F_{r1} = 0,72F$, $F_{r2} = 0,228F$.

Осевые силы $F_{a1} = 0,4F$, $F_{a2} = 0,16F$.

2. Приводим силы, действующие на зубчатое колесо, к центру тяжести сечения вала. В результате приведения осевой силы получаем изгибающий в вертикальной плоскости сосредоточенный момент $M_0 = F_a \dfrac{D}{2}$ и осевую силу (растягивающую или сжимающую)

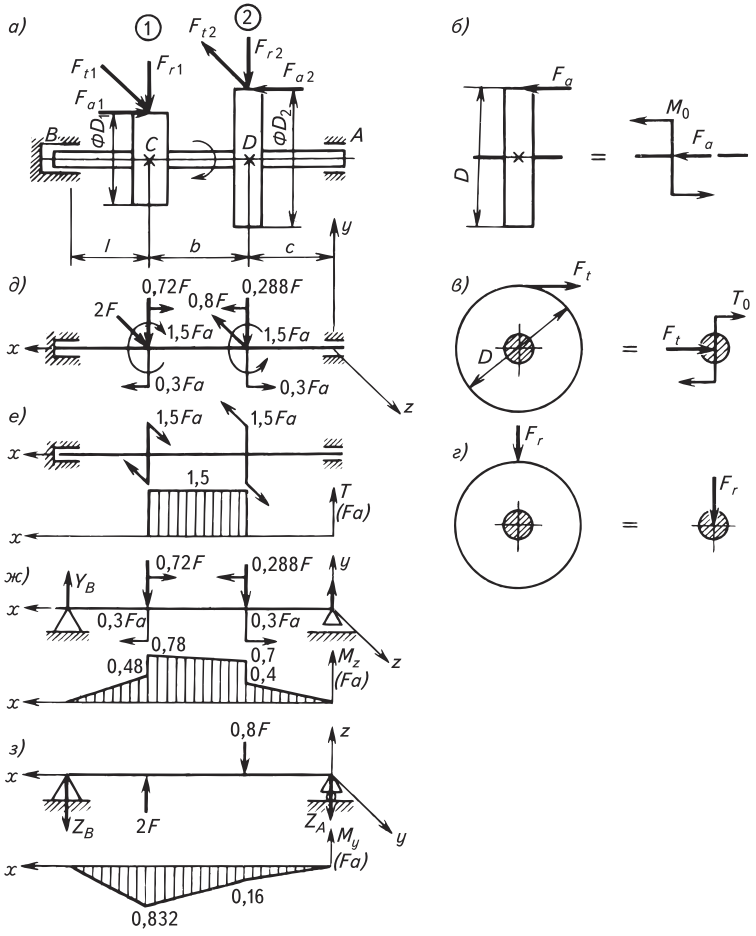


Рис. 5.21

(рис. 5.21, *б*). В результате приведения окружной силы получаем скручивающий сосредоточенный момент $T_0 = F_t \dfrac{D}{2}$ и силу F_t, вызывающую изгиб в горизонтальной плоскости (рис. 5.21, *в*). Радиальную силу переносим по линии ее действия в центр тяжести сечения вала, она вызывает изгиб в вертикальной плоскости (рис. 5.21, *г*).

На первом колесе

$$M_{01} = 0,4F\frac{1,5a}{2} = 0,3Fa; \quad T_{01} = 2F\frac{1,5a}{2} = 1,5Fa.$$

На втором колесе

$$M_{02} = 0,16F\frac{3,75a}{2} = 0,3Fa; \quad T_{02} = 0,8F\frac{3,75a}{2} = 1,5Fa.$$

Обозначаем $M_{01} = M_{02} = M_0$ и $T_{01} = T_{02} = T_0$. Таким образом, получаем следующую расчетную схему вала (рис. 5.21, *д*).

3. Выделяем нагрузки, вызывающие деформации кручения, изгиба в вертикальной плоскости и изгиба в горизонтальной плоскости.

Кручение (рис. 5.21, *е*). Крутящий момент возникает на участке между зубчатыми колесами. Строим эпюру крутящих моментов T.

Изгиб в вертикальной плоскости (рис. 5.21, *ж*). Определяем реакции: $Y_A = 0,4032F$, $Y_B = 0,6048F$. Строим эпюру изгибающих моментов M_z.

Изгиб в горизонтальной плоскости (рис. 5.21, *з*). Определяем реакции: $z_A = 1,12F$, $z_B = 1,68F$. Строим эпюру изгибающих моментов M_y.

4. Определяем опасное сечение, диаметр вала. Опасным является сечение C, в нем действуют наибольшие изгибающие и крутящий моменты. Определяем расчетный (по третьей теории прочности) момент в этом сечении:

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{(1,5Fa)^2 + (0,78Fa)^2 + (0,832Fa)^2} = 1,88Fa.$$

Из условия прочности определяем диаметр вала:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,88 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,0471 \text{ м} = 47,1 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6693—69 (см. Приложение 1) принимаем $d_{\text{н}} = 48$ мм ($Ra40$).

Определяем недогрузку:

$$\sigma_{\max} = \frac{1,88 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 0,048^3} = 170 \text{ МПа};$$

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100\% = \frac{180 - 170}{180} 100\% = 5,6\%.$$

Задача 4. **Определить диаметр вала редуктора (рис. 5.22) по третьей теории прочности, если заданы передаваемая мощность** $P = 14$ **кВт, угловая скорость вала** $\omega = 32$ **рад/с,** $a = 70$ **мм,** $D_1 = 210$ **мм,** $D_2 = 90$ **мм, допускаемое напряжение материала вала** $[\sigma] = 45$ **МПа. Принять** $F_r = 0,36F_t$; $F_a = 0,12F_t$. **Влиянием продольных и поперечных сил пренебречь.**

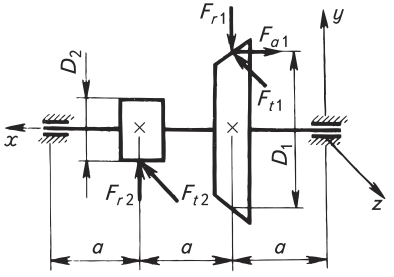


Рис. 5.22

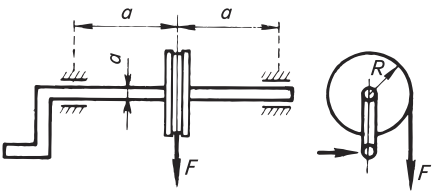


Рис. 5.23

Примечание: мощность равна произведению крутящего момента на угловую скорость $P = T\omega$.

Ответ. $d \geqslant 54{,}7$ мм.

Задача 5. **Вал во́рота диаметром** $d = 300$ мм **испытывает кручение с изгибом (рис. 5.23). Определить наибольший допускаемый вес груза** F**, исходя из условия прочности по третьей теории, если заданы** $a = 0{,}4$ м, $R = 0{,}18$ м, $[\sigma] = 80$ МПа**.**

Ответ. $F \leqslant 0{,}79$ кН.

ГЛАВА 6

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Продольный изгиб — изгиб под действием сжимающих сил. При сжатии стержней под действием сжимающей силы происходит *потеря устойчивости* — внезапный изгиб стержня при достижении нагрузкой значения критической силы. Ось стержня изгибается по синусоиде.

Критическая сила — сила, при которой прямолинейная форма перестает быть устойчивой формой равновесия сжатого стержня. В пределах упругих деформаций она определяется по *формуле Эйлера*:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где $J_{\min}$ — минимальный осевой момент инерции поперечного сечения; E — модуль упругости первого рода; l — длина стержня; μ — коэффициент приведения длины, определяется способом закрепления стержня.

Для наиболее часто встречающихся способов закрепления величина μ приведена на рис. 6.1. Величину μ можно определить по формуле $\mu = 1/m$, где m — число полуволн в изогнутой (по синусоиде) оси стержня.

Критическое напряжение (при $\sigma_{\text{кр}} \leqslant \sigma_{\text{у}}$, где $\sigma_{\text{у}}$ — предел упругости)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где $\lambda = \mu l / i_{\min}$ — гибкость стержня; $i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/A}$ — минимальный радиус инерции сечения.

Таким образом, критические напряжения не зависят от характеристик прочности материала, а определяются только модулем упругости.

Условие применительности формулы Эйлера $\sigma_{\text{кр}} \leqslant \sigma_{\text{у}}$, откуда получаем предельное значение гибкости:

$$\lambda_{\text{пред}} \geqslant \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{у}}}}.$$

Для стали $\lambda_{\text{пред}} \simeq 100$.

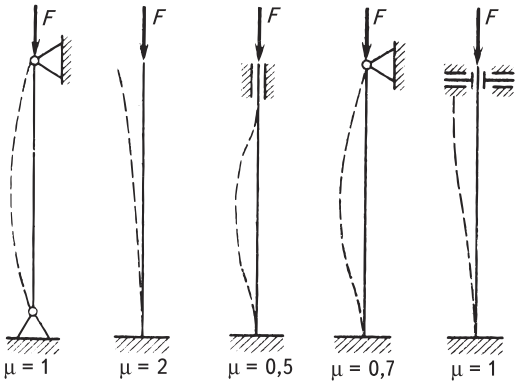


Рис. 6.1

За пределом упругости ($\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{у}}$; $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$) применяется *формула Ясинского*

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda;$$

для стали Ст3 $\sigma_{\text{кр}} = 310{,}0 - 1{,}14\lambda$ (МПа);
для дерева $\sigma_{\text{кр}} = 29{,}3 - 0{,}194\lambda$ (МПа).

Допускаемое напряжение при продольном изгибе определяется через допускаемое напряжение сжатия $[\sigma]_{\text{сж}}$:

$$[\sigma]_{\text{у}} = \varphi[\sigma]_{\text{сж}},$$

где φ — коэффициент снижения допускаемых напряжений (зависит от материала и гибкости стержня, приводится в таблице Приложения 4). Очевидно, $\varphi < 1{,}0$.

Расчеты на устойчивость основываются на *условии устойчивости:*

$$\sigma = F/A \leqslant \varphi[\sigma]_{\text{сж}}.$$

Расчет ведется на сжатие, но по пониженным допускаемым напряжениям, равным $\varphi[\sigma]_{\text{сж}}$.

При проверочном расчете на устойчивость определяется *коэффициент запаса устойчивости:*

$$n_{\text{у}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma} = \frac{F_{\text{кр}}}{F}.$$

Допускаемое значение коэффициента запаса для стальных стержней $[n_{\text{у}}] = 1{,}7 \ldots 3$, чугунных $[n_{\text{у}}] = 5$, деревянных $[n_{\text{у}}] = 3$.

Проектный расчет на устойчивость проводится путем последовательных приближений. В неравенстве устойчивости, когда требуется

определить размеры стержня при выбранном материале и форме сечения, неизвестными являются площадь сечения A и коэффициент φ. Поэтому в первом приближении принимается $\varphi_{1н} = 0,5$. Затем расчет ведется по такой схеме: определяем

1) площадь $A_1 = \dfrac{F}{\varphi_{1н}[\sigma]_{сж}}$;

2) размеры сечения, а по ним радиус инерции

$$i_{\min 1} = \sqrt{J_{\min}/A};$$

3) гибкость стержня

$$\lambda_1 = \mu l / i_{\min 1};$$

4) коэффициент $\varphi_{1к}$ (см. Приложение 4) в конце приближения.

Если $\varphi_{1к}$ и $\varphi_{1н} = 0,5$ значительно расходятся, то проводим второе приближение, взяв в начале расчетов

$$\varphi_{2н} \simeq \frac{\varphi_{1н} + \varphi_{1к}}{2}.$$

Приближения проводим, пока расхождение между коэффициентами в начале и конце приближения не будет меньше 0,1. Если на i-м приближении это расхождение стало $< 0,1$, то результат расчета оцениваем по напряжениям.

Допускаемое напряжение после i-го приближения

$$[\sigma]_у = \varphi_{iк}[\sigma]_{сж}.$$

Напряжение сжатия в стержне

$$\sigma = F/A_i.$$

Находим недогрузку (или перегрузку):

$$\Delta_\sigma = \frac{[\sigma]_у - \sigma}{[\sigma]_у} 100\%.$$

Если недогрузка не превышает 15%, а перегрузка — 5%, то размер сечения подобран удачно. В противном случае делается следующее приближение.

Задача 1. **Определить допускаемую нагрузку на стальной шарнирно закрепленный стержень диаметром $d = 1$ см, длиной $l = 1$ м (рис. 6.2). Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.**

1. Определяем гибкость стержня. Радиус инерции круглого сечения

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{0,01}{4} = 0,0025 \text{ м}.$$

При шарнирном закреплении $\mu = 1$. Вычисляем гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1}{0,0025} = 400.$$

Полученное значение явно больше предельного.

2. Определяем критическое напряжение по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{400^2} = 1234 \text{ Па}.$$

3. Определяем критическую силу:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = \sigma_{\text{кр}} \frac{\pi d^2}{4} = 1234 \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} = 969 \text{ Па}.$$

4. Определяем допускаемую нагрузку при коэффициенте запаса на устойчивость $n_{\text{у}} = 2$:

$$F_{\text{доп}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{у}}} = \frac{969}{2} = 484,5 \text{ Н}.$$

Задача 2. **Определить диаметр стального стержня длиной $l = 1$ м, шарнирно закрепленного ($\mu = 1$) (рис. 6.2), под сжимающую нагрузку $F = 1000$ Н. Допускаемое напряжение на сжатие материала стержня $[\sigma]_{\text{сж}} = 160$ МПа. Коэффициент запаса на устойчивость $n_{\text{у}} = 2,5$.**

1. Это проектный расчет на устойчивость. Условие устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leqslant \varphi [\sigma]_{\text{сж}}.$$

2. Решаем его методом последовательных приближений. В начале первого приближения задаем $\varphi_{1\text{н}} = 0,5$. Определяем:

площадь сечения

$$A_1 \geqslant \frac{F}{0,5[\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{1000}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

диаметр сечения

$$d_1 \geqslant \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,125 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

радиус инерции

$$i_1 = \frac{d}{4} = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

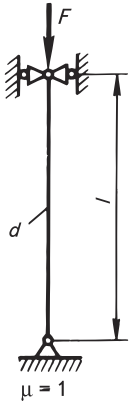


Рис. 6.2

гибкость стержня

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1}{0,1 \cdot 10^{-2}} = 1000.$$

Гибкость выходит за пределы таблицы для φ (см. Приложение 4). Это говорит о том, что коэффициент φ в конце первого приближения можно приближенно взять равным нулю: $\varphi_{1к} \simeq 0$.

Тогда во втором приближении расчет начнем с $\varphi_{2н} = 0,1$:

площадь сечения $A_2 \geqslant \dfrac{F}{0,1[\sigma]_{сж}} = \dfrac{1000}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,625 \cdot 10^{-4}$ м^2;

диаметр сечения $d_2 \geqslant \sqrt{\dfrac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 0,625 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,9 \cdot 10^{-2}$ м;

радиус инерции $i_2 = \dfrac{d_2}{4} = 0,225 \cdot 10^{-2}$ м;

гибкость стержня $\lambda_2 = \dfrac{\mu l}{i_2} = \dfrac{1 \cdot 1}{0,225 \cdot 10^{-2}} = 445.$

Таким образом, в конце второго приближения гибкость также выходит за пределы табличных значений. Это свидетельствует о том, что гибкость стержня больше предельной, и следует воспользоваться формулой Эйлера для расчетов на устойчивость.

Заданная нагрузка есть допускаемая нагрузка на стержень искомого сечения. Ее можно определить через критическую силу и коэффициент запаса:

$$F = \frac{F_{кр}}{n_у}.$$

Подставляем значение критической силы по формуле Эйлера:

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 n_у},$$

откуда определяем момент инерции искомого сечения:

$$J = \frac{(\mu l)^2 n_у F}{\pi^2 E}.$$

Для круглого сечения $J = \pi d^4/64 \simeq 0,05d^4$, откуда диаметр стержня

$$d = \sqrt[4]{\frac{(\mu l)^2 n_у F}{0,05\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{(1 \cdot 1)^2 2,5 \cdot 1000}{0,05 \cdot 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}} = 1,262 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,62 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 6636—69 из ряда $Ra40$ выбираем $d_н = 13$ мм.

Задача 3. **Колонна состоит из двух одинаковых соединенных между собой швеллеров № 30 (рис. 6.3). Два швеллера расставлены так, что моменты инерции относительно осей y и z равны: $J_{y\Sigma} = J_{z\Sigma}$. Материал — сталь Ст3, допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma] = 160,0$ МПа, длина стержня $l = 6$ м. Коэффициент приведения длины $\mu = 2$. Определить расстояние между швеллерами a и допускаемую нагрузку $[F]$.**

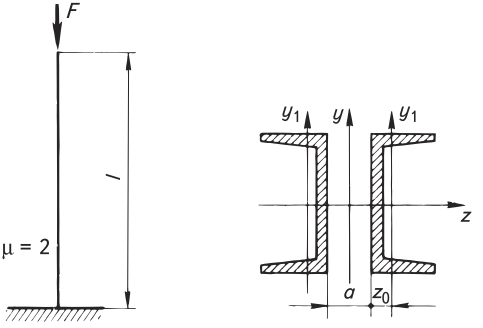


Рис. 6.3

1. По сортаменту (ГОСТ 8240—72) для одного швеллера № 30 имеем:

моменты инерции $J_z = 5810$ см^4, $J_{y1} = 327$ см^4;

площадь сечения $A = 40,5$ см^2;

радиус инерции $i_z = 12$ см;

координата центра тяжести швеллера от его задней стенки $z_0 = 2,52$ см.

2. Расстояние a определим из условия равенства осевых моментов инерции для составного сечения $J_{y\Sigma} = J_{z\Sigma}$.

Моменты инерции составного сечения:

1) момент инерции относительно оси y равен моменту инерции относительно оси y_1 плюс произведение площади на квадрат расстояния между осями:

$$J_{y\Sigma} = 2\left[J_{y1} + \left(\frac{a}{2} + z_0\right)^2 A\right];$$

2) момент инерции относительно оси z равен удвоенному значению момента инерции швеллера:

$$J_{z\Sigma} = 2J_z.$$

Приравниваем эти моменты инерции:

$$2\left[J_{y1}+\left(\frac{a}{2}+z_0\right)^2 A\right]=2J_z,$$

откуда

$$a=2\sqrt{\frac{J_z-J_{y1}}{A}}-2z_0=2\sqrt{\frac{5810-327}{40,5}}-2\cdot 2,52=18,24 \text{ см}.$$

3. Определяем допускаемую нагрузку. Для рассматриваемой колонны радиус инерции будет равен радиусу инерции швеллера относительно оси z. Так как $J_{y\Sigma}=J_{z\Sigma}$, то $i_{z\Sigma}=i_{y\Sigma}$, а

$$i_{z\Sigma}=\sqrt{\frac{J_{z\Sigma}}{2A}}=\sqrt{\frac{2J_z}{2A}}=i_z.$$

Гибкость колонны $\lambda=\mu l/i_z=2\cdot 6/0,12=100$. Для полученной гибкости и материала колонны из таблицы (см. Приложение 4) определяем $\varphi=0,6$.

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_{\text{у}}=\varphi[\sigma]_{\text{сж}}=0,6\cdot 160=96 \text{ МПа}.$$

Допускаемая нагрузка

$$[F]=[\sigma]_{\text{у}}\cdot 2A=96\cdot 10^6\cdot 2\cdot 40,5\cdot 10^{-4}=780 \text{ кН}.$$

4. Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_{\text{у}}=F_{\text{кр}}/[F].$$

Критическая сила

$$F_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}=\frac{3,14^2\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 2\cdot 5810\cdot 10^{-8}}{(2\cdot 6)^2}=1590 \text{ кН},$$

откуда

$$n_{\text{у}}=F_{\text{кр}}/[F]=1590/780=2,04,$$

что соответствует рекомендуемым для стальных стержней значениям $[n_{\text{у}}]=1,7\ldots 3$.

Задача 4. **Подобрать двутавр под сжимающую нагрузку** $F=750$ кН **(рис. 6.4), если заданы длина** $l=4,5$ м**, материал — сталь Ст3,** $[\sigma]_{\text{ск}}=160,0$ МПа**.**

Условие устойчивости

$$\sigma=F/A\leqslant\varphi[\sigma]_{\text{сж}}.$$

В этом неравенстве неизвестны значения A и φ. Поэтому задача решается методом последовательных приближений.

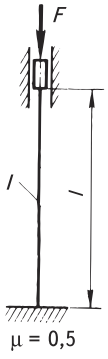


Рис. 6.4

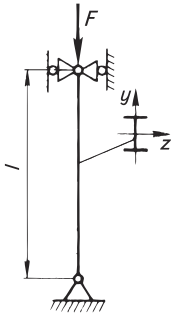


Рис. 6.5

Задаем $\varphi_{1н} = 0,5$, тогда площадь сечения двутавра определяется из неравенства

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н}[\sigma]_{сж}} = \frac{750 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 93,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 93,75 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239—72 (см. Приложение 2) выбираем двутавр № 50, у которого $A = 100$ см^2, $i_{\min} = 3,23$ см.

Для стержня с выбранным двутавром гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 450}{3,23} = 69,7.$$

По найденной гибкости и материалу определяем $\varphi_{1к} = 0,81$ в конце первого приближения (см. Приложение 4).

Проводим второе приближение. Задаем $\varphi_{2н} = (\varphi_{1н} + \varphi_{1к})/2 = (0,5 + 0,81)/2 \simeq 0,65$;

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_{2н}[\sigma]_{сж}} = \frac{750 \cdot 10^3}{0,65 \cdot 160 \cdot 10^6} = 65,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 65,1 \text{ см}^2.$$

Выбираем двутавр № 40: $A = 72,6$ см^2, $i_{\min} = 3,03$ см;

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 450}{303} = 74,3.$$

Линейной интерполяцией значений $\varphi = 0,81$ (для $\lambda = 70$) и $\varphi = 0,75$ (для $\lambda = 80$) определяем φ для $\lambda = 74,3$:

$$\varphi_{3н} = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4,3 = 0,784.$$

Делаем третье приближение. Задаем $\varphi_{3н} = (0,65+0,784)/2 = 0,72$;

$$A_3 \geqslant \frac{F}{\varphi_{3н}[\sigma]_{сж}} = \frac{750 \cdot 10^3}{0,72 \cdot 160 \cdot 10^6} = 65,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 65,1 \text{ см}^2.$$

Этому неравенству удовлетворяет двутавр №40, для которого были определены $\lambda = 74,3$ и $\varphi = 0,784$.

Делаем четвертое приближение. Задаем $\varphi_{4н} = (0,72 + 0,784)/2 = 0,752$;

$$A_4 = \frac{F}{\varphi_{4н}[\sigma]_{сж}} = \frac{750 \cdot 10^3}{0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 62,4 \text{ см}^2.$$

Проверим двутавр №36: $A = 61,9$ см^2; $i_{\min} = 2,89$ см.

Действующие напряжения

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{750 \cdot 10^3}{61,9 \cdot 10^{-4}} = 121 \text{ МПа}.$$

Определим допускаемые напряжения для выбранного двутавра. Вычисляем гибкость:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,5 \cdot 4,5/(2,89 \cdot 10^{-2}) = 78.$$

Путем интерполяции по таблице (см. Приложение 4) находим

$$\varphi = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 2 = 0,762.$$

Допускаемые напряжения

$$[\sigma]_у = \varphi[\sigma]_{сж} = 0,762 \cdot 160 = 121,9 \text{ МПа}.$$

Таким образом, $\sigma = 121$ ПМа, $[\sigma]_у = 121,9$ ПМа.

Профиль подобран удачно. Ясно, что недогрузка будет меньше 15%.

Задача 5. **Определить критические силу и напряжение для двутавра № 27 длиной $l = 4$ м с шарнирным закреплением ($\mu = 1$) (рис. 6.5), материал — сталь Ст3.**

Ответ. $F_{кр} = 320$ кН; $\sigma_{кр} = 80$ МПа.

Задача 6. **Определить размеры кольцевого сечения (отношение внутреннего диаметра к наружному $\alpha = 0,9$)**

стержня, длина и способ закрепления которого аналогичны указанным в задаче 5 ($l = 4$ м, $\mu = 1$), при критической силе $F_{\text{кр}} = 320$ кН, такой же, как и для двутавра № 27 (см. задачу 5). Определить выигрыш в массе, если использовать стержень кольцевого сечения вместо двутавра.

Ответ. Наружный диаметр $d \geqslant 11{,}127$ см. Выигрыш в массе определяется соотношением площадей сечений. Применение кольцевого сечения позволяет уменьшить массу стержня в 2,18 раза.

ГЛАВА 7

ИНЕРЦИОННАЯ, УДАРНАЯ НАГРУЗКИ. КОЛЕБАНИЯ

Инерционная нагрузка. При поступательном движении тела массой M с ускорением a к действующим нагрузкам добавляется *сила инерции*

$$F = Ma.$$

При вращательном равномерном движении необходимо учитывать *центробежную силу инерции*

$$F = M\omega^2 r,$$

где M — масса вращающегося тела; r — радиус вращения центра масс вращающегося тела; ω — угловая скорость вращения.

Ударная нагрузка является одним из видов инерционных нагрузок. За время удара, исчисляемое сотыми долями секунды, скорость ударяющего тела падает до нуля. Возникают большое ускорение и, соответственно, большая сила инерции, значение которой и определяет действие ударной нагрузки. Время удара и закон изменения скорости зависят от большого числа факторов, трудно поддающихся определению. Поэтому напряжения и деформации, возникающие при ударе, определяются из предположения, что вся кинетическая или потенциальная энергия ударяющего тела полностью переходит в энергию упругой деформации ударяемого тела.

При действии инерционных и ударных нагрузок напряжения и деформации в динамике ($\sigma_д$, $\delta_д$) определяются через напряжения и деформации при статическом приложении нагрузок ($\sigma_{ст}$, $\delta_{ст}$) с помощью коэффициента динамичности:

$$\sigma_д = k_д\sigma_{ст}; \quad \delta_д = k_д\delta_{ст}.$$

Коэффициент динамичности:

при вертикальном движении с ускорением

$$k_д = 1 + a/g;$$

при вертикальном ударе

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_{ст}} \quad \text{или} \quad k_д = 1 + \sqrt{1 + \nu^2/(g\delta_{ст})};$$

при горизонтальном ударе

$$k_д = \sqrt{\nu^2/(g\delta_{ст})};$$

при крутящем ударе

$$k_{\text{д}} = \omega\sqrt{J_0/(T\varphi_{\text{ст}})},$$

где H — высота падения, ν — скорость движения ударяющего тела; ω — угловая скорость ударяющего тела; $\delta_{\text{ст}}$, $\varphi_{\text{ст}}$ — деформация при статическом приложении нагрузки; J_0 — момент инерции массы ударяющего тела; T — передаваемый крутящий момент; g — ускорение свободного падения.

Приведенные формулы справедливы, если масса (момент инерции массы) ударяющего тела намного больше соответствующих величин для ударяемого тела и удар абсолютно неупругий.

Колебания. *Частота собственных колебаний* тела на некоторой упругой системе

$$\omega_0 = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}},$$

где $\delta_{\text{ст}}$ — деформация упругой системы при статическом приложении веса этого тела.

Вынужденные колебания — колебания под действием вынуждающей силы

$$F = F_0 \sin \Omega t.$$

Вынужденные колебания происходят с *частотой вынуждающей силы* Ω и постоянной *амплитудой*

$$A = \frac{\delta(F_0)}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{4n^2\Omega^2}{\omega_0^4}}},$$

где $\delta(F_0)$ — перемещение упругой системы при статическом приложении силы, равной амплитуде вынуждающей силы F_0; n — коэффициент затухания колебаний, характеризующий силы сопротивления среды.

Резонанс — явление повышения амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частот собственных колебаний и вынуждающей силы.

Амплитуда при резонансе

$$A = \frac{\delta(F_0)\omega_0}{2n}.$$

При отсутствии сопротивления среды амплитуда стремится к бесконечности. Поэтому в практике расчетов на динамическую прочность расчеты на резонанс занимают ведущее место.

Меры борьбы с резонансом:

1) уменьшение жесткости упругой системы введением упругих элементов (резиновые прокладки, пружины) приводит к увеличе-

нию $\delta_{\text{ст}}$, а это приводит к уменьшению ω_0 и в результате система выходит из резонансной зоны;

2) повышение сопротивления среды (введение демпферов) приводит к увеличению сопротивления среды, а следовательно, к уменьшению амплитуды резонансных колебаний.

Приведенные формулы справедливы для случая, когда масса упругой системы пренебрежимо мала по сравнению с массой колеблющегося тела.

Максимальные напряжения при вынужденных колебаниях определяются через коэффициент динамичности

$$k_{\text{д}} = 1 + A/\delta_{\text{ст}}.$$

Задача 1. **Стальная проволока диаметром** $d = 2$ мм **и длиной** $l = 80$ см **с грузом массой** $M = 8$ кг **на конце равномерно вращается вокруг горизонтальной оси (рис. 7.1). Определить частоту вращения, при которой произойдет разрушение проволоки, если предел временного сопротивления стали** $\sigma_{\text{в}} = 800$ МПа**.**

1. Разрушающая сила равна пределу временного сопротивления, умноженному на площадь сечения:

$$F_{\text{разр}} = \sigma_{\text{в}} \frac{\pi d^2}{4}.$$

2. Сила инерции при вращении груза на проволоке

$$F_{\text{ин}} = M\omega^2 l.$$

3. Когда сила инерции станет равна разрушающей, произойдет разрыв проволоки. Из равенства этих сил определяем искомую угловую скорость:

$$\sigma_{\text{в}} \frac{\pi d^2}{4} = M\omega^2 l, \quad \text{но} \quad \omega = \frac{\pi n}{30},$$

откуда

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{\text{в}}\pi d^2}{4Ml}} = \frac{30}{3,14}\sqrt{\frac{800 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,002^2}{4 \cdot 8 \cdot 0,8}} =$$

$$= 189 \text{ об/мин.} = 3,015 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 2. **Груз массой** $M = 150$ кг **падает на консольную балку длиной** $l = 1,6$ **м двутаврового сечения (№ 14,** $W_z = 81,7$ см^3**,** $J_z = 572$ см^4**) с высоты** $H = 1$ см **(рис. 7.2). Определить возникающие при ударе напряжения** $\sigma_{\text{д}}$**, прогиб** $\delta_{\text{д}}$ **и частоту собственных колебаний системы** ω_0 **после удара. Удар абсолютно неупругий. Модуль упругости стали** $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

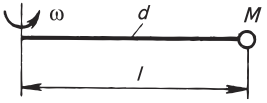


Рис. 7.1

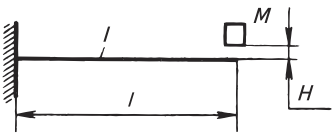


Рис. 7.2

1. Определяем напряжение при статическом приложении нагрузки. Вес груза $Q = Mg = 1500$ Н при $g \simeq 10$ м/с^2.

Максимальный изгибающий момент в заделке $M_{\max} = Ql$, тогда

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Ql}{W_z} = \frac{1500 \cdot 1,6}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 29,4 \text{ МПа}.$$

2. Определяем прогиб балки при статическом приложении веса груза. Прикладываем вертикальную единичную силу в сечении A в дополнительной системе, свободной от внешних нагрузок.

Уравнения для моментов от силы Q и единичной силы

$$M = -Qx; \quad M_1 = -1 \cdot x.$$

Прогиб на конце балки

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1}{EJ} \int_0^l Qx^2 \mathrm{d}x = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

Представляем числовые значения:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1500 \cdot 1,6^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,00184 \text{ м} = 1,8 \text{ мм}.$$

3. Определяем коэффициент динамичности:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,01}{0,0018}} = 4,48.$$

4. Определяем напряжение и деформацию при ударе:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} = 4,48 \cdot 29,4 = 131,5 \text{ МПа};$$

$$\delta_{\text{у}} = k_{\text{д}} \delta_{\text{ст}} = 4,48 \cdot 1,8 = 8,05 \text{ мм}.$$

5. Определяем частоту собственных колебаний груза при ударе:

$$\omega_0 = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}} = \sqrt{10/0,0018} = 74,5 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 3. **Найти частоту собственных колебаний груза массой** $M = 100$ кг **на раме (рис. 7.3) в горизонтальном и вертикальном направлениях, если заданы** $a = 1$ м**, диаметр сечения рамы** $d = 5$ см**, модуль упругости** $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

1. Определяем статические перемещения сечения рамы под действием веса груза $F = gM$.

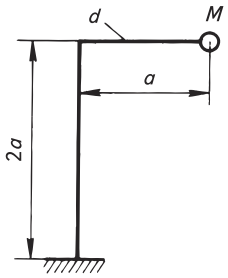


Рис. 7.3

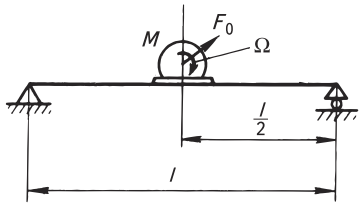


Рис. 7.4

Определение горизонтального и вертикального перемещения сечения A с помощью интегралов Мора рассмотрено в задаче 1 (см. § 3.1). Воспользуемся результатами:

вертикальное перемещение

$$\delta_A^{\text{в}} = \frac{7Fa^3}{3EJ};$$

горизонтальное перемещение

$$\delta_A^{2} = \frac{2Fa^3}{EJ}.$$

2. Определяем частоты собственных колебаний, подставляя $F = gM$, $J = 0{,}05d^4$:

в вертикальной плоскости

$$\omega_0^{\text{в}} = \sqrt{g/\delta_A^{\text{в}}} = \sqrt{\frac{3E \cdot 0{,}05d^4}{7Ma^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05^4}{7 \cdot 100 \cdot 1^3}} = 16{,}37 \text{ с}^{-1};$$

в горизонтальной плоскости

$$\omega_0^{\text{г}} = \sqrt{g/\delta_A^{2}} = \sqrt{\frac{E \cdot 0{,}05d^4}{2Ma^3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05^4}{2 \cdot 100 \cdot 1^3}} = 17{,}68 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 4. **Электровентилятор массой $M = 400$ кг расположен посередине двухопорной двутавровой (№ 14) балки длиной $l = 2$ м (рис. 7.4). Частота вращения лопастей вентиляторов $\Omega = 100$ с$^{-1}$, их дисбаланс создает при вращении центробежную силу $F_0 = 100$ Н. Определить амплитуду вынужденных колебаний электровентилятора на балке и максимальные напряжения в балке. Масса балки, сопротивление среды пренебрежимо малы.**

1. Определяем частоту собственных колебаний системы. Для этого определим прогиб балки от статического приложения веса электровентилятора:

$$F = gM \simeq 10 \cdot 400 = 4000 \text{ Н}.$$

С помощью интегралов Мора получаем

$$\delta_{\text{ст}} = y_{(F)} = \frac{Fl^3}{48EJ} = \frac{4000 \cdot 2^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,583 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Частота собственных вертикальных колебаний системы

$$\omega_0 = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}} = \sqrt{9,81/(0,583 \cdot 10^{-3})} = 129,7 \text{ с}^{-1}.$$

Прогиб балки от статического приложения силы, равной амплитуде вынуждающей силы,

$$\delta(F_0) = y(F_0) = \frac{F_0 l^3}{48EJ} = \frac{100 \cdot 2^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

2. Определим амплитуду вынужденных колебаний при $n = 0$:

$$A = \frac{\delta(F_0)}{1 - \Omega^2/\omega_0^2} = \frac{0,0146 \cdot 10^{-3}}{1 - 100^2/129,7^2} = 0,036 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

3. Определим максимальные напряжения. При статическом приложении веса вентилятора опасное сечение балки находится посередине. В нем возникает максимальный изгибающий момент $M = Fl/4$.

Максимальное напряжение при статическом приложении нагрузки

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Fl}{4W} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 2}{4 \cdot 81,7 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \text{ МПа}.$$

Коэффициент динамичности

$$k_{\text{д}} = 1 + \frac{A}{\delta_{\text{ст}}} = 1 + \frac{0,036 \cdot 10^{-3}}{0,583 \cdot 10^{-3}} = 1,062.$$

Максимальные напряжения при вынужденных колебаниях балки

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} = 1,062 \cdot 24,5 = 26 \text{ МПа}.$$

Задача 5. **Определить частоту собственных колебаний груза на двутавровой (№ 30) балке (рис. 7.5,** *а*), **пренебрегая массой балки, если заданы вес груза** $F = 40$ кН, $l = 3$ м, **момент инерции сечения** $J = 7080$ см^4, **модуль упругости** $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**.**

1. Балка один раз статически неопределима. Раскрываем статическую неопределимость системы.

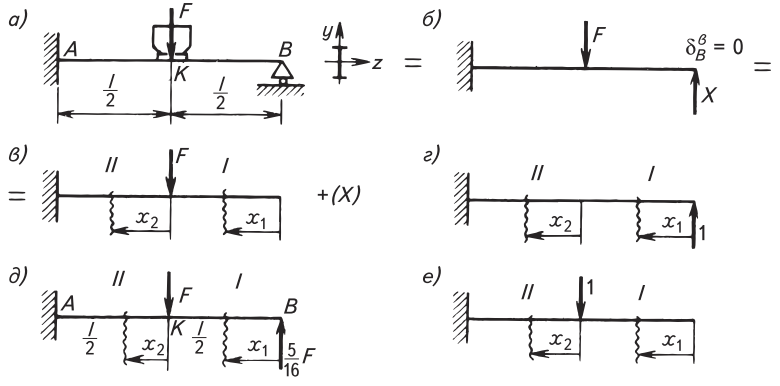


Рис. 7.5

Уравнение деформаций

$$\delta_B^{\text{в}} = \delta_B^{\text{в}}(F) + X\delta_B^{\text{в}}(1).$$

Определяем перемещения в основной системе (рис. 7.5, *в*) и в системе с единичной силой (рис. 7.5, *г*):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant l/2$; $M = 0$; $M_1 = 1 \cdot x_1$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant l/2$; $M = -Fx_2$; $M_1 = 1(l/2 + x_2)$;

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(F) = -\int_0^{l/2} Fx_2(l/2 + x_2) = -\frac{5}{48}Fl^3;$$

$$EJ\delta_B^{\text{в}}(1) = \int_0^{l/2} x_1^2 \mathrm{d}x_1 + \int_0^{l/2} (l/2 + x_2)^2 \mathrm{d}x_2 = \frac{1}{3}l^3;$$

$$X = \frac{5}{16}F.$$

2. Далее оперируем с эквивалентной системой (рис. 7.5, *д*). Определяем с помощью интегралов Мора статический прогиб точки K приложения силы F (рис. 7.5, *д, е*):

I участок: $0 \leqslant x_1 \leqslant l/2$; $M = \dfrac{5}{16}Fx_1$; $M_1 = 0$;

II участок: $0 \leqslant x_2 \leqslant l/2$;

$$M = \frac{5}{16}F(l/2 + x_2) - Fx_2 = \frac{5}{32}Fl - \frac{11}{16}Fx_2; \quad M_1 = -1 \cdot x_2;$$

Прогиб

$$EJ\delta_K = -\int_0^{l/2} \left(\frac{5}{32}Fl - \frac{11}{16}Fx_2\right) x_2 \mathrm{d}x_2 = \frac{7}{768}Fl^3; \quad \delta_K = \frac{7Fl^3}{768EJ}.$$

3. Определяем частоту собственных колебаний груза на балке:

$$\omega_0 = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 768EJ}{7 \cdot F \cdot l^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 768 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}}{7 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 3^3}} = 119 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 6. **Определить диаметр троса, на котором подвешен груз массой** 3000 кг**, поднимаемый с ускорением** $a = 4$ м/с^2**, без учета массы троса, если** $[\sigma] = 70$ МПа**.**

Ответ. $d_{\text{троса}} \geqslant 24{,}7$ мм.

Задача 7. **Определить наибольшую допускаемую высоту** $[H]$ **падения груза массой** $M = 200$ кг **на двутавровую балку с шарнирными опорами. Груз падает посередине пролета длиной** 3 м**. Двутавр № 16,** $[\sigma] = 160$ МПа**. Как изменится** $[H]$**, если под опоры подложить резиновые прокладки размером** $80 \times 80 \times 40$ мм? **Модуль упругости стали** $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па**, резины** $E_{\text{р}} = 8$ МПа**.**

Ответ. 44,4 и 98 мм.

Задача 8. **При условиях задачи 7 определить собственную частоту колебаний груза на балке после его падения при отсутствии и наличии прокладок. Весом балки пренебречь.**

1. Частота собственных колебаний груза на балке определяется деформацией (прогибом) балки при статическом приложении веса груза $\delta_{\text{ст}}$:

$$\omega_0 = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}}.$$

2. При отсутствии резиновых прокладок прогиб балки от веса груза

$$\delta'_{\text{ст}} = y_{\text{ст}} = \frac{gMl^3}{48E_{\text{ст}}J} = \frac{9{,}81 \cdot 200 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 0{,}633 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Частота собственных колебаний

$$\omega'_0 = \sqrt{9{,}81/(0{,}633 \cdot 10^{-3})} = 124{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

3. При наличии резиновых прокладок деформация при статическом приложении веса груза увеличится на величину деформации прокладок $\delta_{\text{пр}}$:

$$\delta_{\text{пр}} = \frac{Rl_{\text{р}}}{E_{\text{р}}A_{\text{р}}} = \frac{9{,}81 \cdot 200 \cdot 0{,}04}{2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}08} = 0{,}766 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

где $R = gM/2$ — сжимающее усилие на прокладку, равное половине веса груза; $l_{\text{р}} = 40$ мм — толщина прокладки; $A_{\text{р}} = 80 \times 80$ мм — площадь сечения прокладки.

Суммарная деформация

$$\delta'_{\text{ст}} = y_{\text{ст}} + \delta_{\text{пр}} = 0,633 \cdot 10^{-3} + 0,766 \cdot 10^{-3} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{9,81/(1,4 \cdot 10^{-3})} = 83,7 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 9. **Во сколько раз уменьшится амплитуда вынужденных колебаний груза на балке (при условиях задачи 7) после установки резиновых прокладок, если коэффициент затухания $n = 2$ с$^{-1}$, частота вынуждающей силы $\Omega = 135$ с$^{-1}$?**

Ответ. Амплитуда уменьшится в 14,6 раза.

ПРИЛОЖЕНИЯ

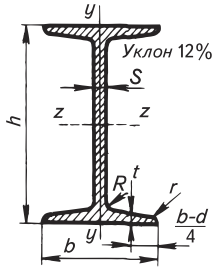
Приложение 1

Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636—69

Ряды				
*Ra*5	*Ra*10	*Ra*20	*Ra*40	
1,0	1,0	1,0 1,1	1,0 1,1	1,05 1,15
	1,2	1,2 1,4	1,2 1,4	1,3 1,5
1,6	1,6	1,6 1,8	1,6 1,8	1,7 1,9
	2,0	2,0 2,2	2,0 2,2	2,1 2,4
2,5	2,5	2,5 2,8	2,5 2,8	2,6 3,0
	3,2	3,2 3,6	3,2 3,6	3,4 3,8
4,0	4,0	4,0 4,5	4,0 4,5	4,2 4,8
	5,0	5,0 5,6	5,0 5,6	5,3 6,0
6,3	6,3	6,3 7,1	6,3 7,1	6,7 7,5
	8,0	8,0 9,0	8,0 9,0	8,5 9,5

Примечание. Рекомендуемые размеры, выходящие из диапазона 1–10 мм, получаются умножением или делением на 10^n, например 0,63; 6,3; 63; 630 и т. д. При выборе размеров предпочтение должно отдаваться рядам с более крупной градацией: ряд *Ra*5 следует предпочитать ряду *Ra*10, ряд *Ra*10 — ряду *Ra*20, ряд *Ra*20 — ряду *Ra*40.

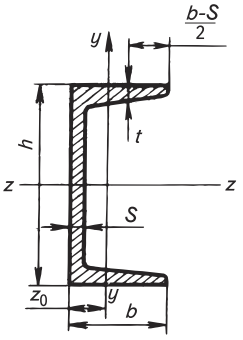
Двутавры. Сортамент прокатной стали. ГОСТ 8239—72



Номер двутавра	Основные размеры, мм				Площадь сечения A, см^3	Масса 1 м, кг	Геометрические характеристики сечения для осей					
							$z-z$			$y-y$		
	h	b	s	t			W_z, см^3	J_z, см^4	i_z, см	W_y, см^3	J_y, см^4	i_y, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	39,7	198	4,06	6,49	17,9	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	58,4	350	4,88	8,72	27,9	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	81,7	572	5,73	11,5	41,9	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	109,0	873	6,57	14,5	58,6	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	143,0	1290	7,42	18,4	82,6	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	159,0	1430	7,51	22,8	114	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	184,0	1840	8,28	23,1	115	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	22,7	203,0	2030	8,37	28,2	155	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	232,0	2550	9,13	28,6	157	2,27

22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	254,0	2790	9,22	34,3	206	2,5
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	289,0	3460	9,97	34,5	198	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	317,0	3800	10,1	41,6	260	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	371,0	5010	11,2	41,5	260	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,9	407,0	5500	11,3	50	337	2,8
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	472,0	7080	12,3	49,9	337	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,2	518,0	7780	12,5	60,1	436	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,2	597,0	9840	13,5	59,9	419	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	743,0	13380	14,7	71,1	516	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	953,0	19062	16,2	86,1	667	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,5	1231,0	27696	18,1	101	808	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,5	1589,0	39727	19,9	123	1043	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,6	2035,0	55962	21,8	151	1356	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138	108,0	2560,0	76806	23,6	182	1726	3,54

Швеллеры. Сортамент прокатной стали. ГОСТ 8240—72



Номер швеллера	Размеры, мм				Площадь сечения A, см^3	Масса 1 м, кг	Геометрические характеристики сечения для осей						
							$z-z$			$y-y$			z_0, см
	h	b	s	t			J_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	6,46	1,370	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	45,40	11,0	1,700	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	13,30	545,0	77,8	5,66	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	63,30	13,80	1,870	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	15,30	823,0	103,0	6,49	78,80	16,40	2,010	2,0

18	180	70	5,1	8,7	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	86,0	17,0	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	105,0	20,0	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	113,0	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	139,0	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,70	21,0	2110,0	192,0	8,89	151,0	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	187,0	30,0	2,250	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,60	24,0	2900,0	242,0	9,73	208,0	31,6	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	254,0	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	262,0	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,0	327,0	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,50	36,50	7980	484,0	13,10	410,0	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,40	41,90	10820	601,0	14,20	513,0	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,50	48,30	15220	761,0	15,70	642,0	73,40	3,230	2,75

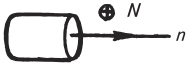
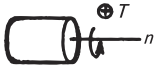
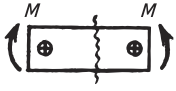
Приложение 4

Коэффициенты φ уменьшения допускаемого напряжения на сжатие при расчете на устойчивость

Гибкость λ	φ для				
	сталей Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	сталей Ст5	стали повышенного качества $\sigma_т \geqslant 320$ МПа	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Приложение 5

Основные расчетные формулы

Деформация	Растяжение (сжатие)	Кручение	Изгиб
Закон Гука	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	$\sigma = E\varepsilon$
Внутренний силовой фактор	$N = \int\limits_A \sigma \mathrm{d}A = \underset{\text{сторону}}{\overset{\text{по одну}}{\sum}} F_{xi}$	$T = \int\limits_A \tau\rho \mathrm{d}A = \underset{\text{сторону}}{\overset{\text{по одну}}{\sum}} M_{xi}$	$M_z = \int\limits_A \sigma y \mathrm{d}A = \underset{\text{сторону}}{\overset{\text{по одну}}{\sum}} M_{zi}$
Правило знаков			
Напряжение	$\sigma = N/A$	$\tau = \dfrac{T}{J_\mathrm{p}}\rho,$ $\tau_{\max} = T/W_\mathrm{p}$	$\sigma = \dfrac{M_z}{J_z}y,$ $\sigma_{\max} = M_z/W_z$
Условие прочности	$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$	$\tau_{\max} \leqslant [\tau]$	$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$
Деформация	$\Delta l = \int\limits_0^x \dfrac{N\mathrm{d}x}{EA}$	$\varphi = \int\limits_0^x \dfrac{T\mathrm{d}x}{GJ_\mathrm{p}}$	$y'' = M_z/(EJ_z),$ $y' = \theta = \int\limits_0^x \dfrac{M_z\mathrm{d}x}{EJ_z} + \theta_0,$ $y = \int\limits_0^x \int \left(\dfrac{M_z\mathrm{d}x}{EJ_z}\right)\mathrm{d}x + +\theta_0 x + y_0$
Интегралы Мора	$\Delta l = \sum\limits_i \int\limits_0^{l_i} \dfrac{NN_1}{EA}\mathrm{d}x$	$\varphi = \sum\limits_i \int\limits_0^{l_i} \dfrac{TT_1}{GJ_\mathrm{p}}\mathrm{d}x$	$\delta = \sum\limits_i \int\limits_0^{l_i} \dfrac{MM_1}{EJ}\mathrm{d}x$

Приложение 5

Основные расчетные формулы (продолжение)

Деформация	Растяжение (сжатие)	Кручение	Изгиб
Условие жесткости	$\Delta l_{\max} \leqslant [\Delta l]$	$\varphi_{\max} \leqslant [\varphi]$	$\delta_{\max} \leqslant [\delta]$
Геометрические характеристики сечения	Площадь сечения $A = \int\limits_A \mathrm{d}A$	Полярный момент инерции $J_\mathrm{p} = \int\limits_A \rho^2 \mathrm{d}A$ Полярный момент сопротивления $W_\mathrm{p} = J_\mathrm{p}/\rho_{\max}$	Осевой момент инерции $J_z = \int\limits_A y^2 \mathrm{d}A$ Осевой момент сопротивления $W_z = J_z/y_{\max}$

Приложение 6

Размерность входящих в решения задач величин

Величина	Размерность
Размеры (длина, диаметр…), перемещения	м; мм $= 1 \cdot 10^{-3}$ м
Угол	радиан (безразмерная величина) 1 рад $= 57,3^\circ$
Масса	кг
Плотность	кг/м^3
Ускорение	м/с^2
Ускорение свободного падения	$9,81$ м/с$^2 \approx 10$ м/с^2
Площадь сечения	м^2; см$^2 = 1 \cdot 10^{-4}$ м^2; мм$^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2
Момент сопротивления сечения	м^3; см$^3 = 1 \cdot 10^{-6}$ м^3; мм$^3 = 1 \cdot 10^{-9}$ м^3
Момент инерции сечения	м^4; см$^4 = 1 \cdot 10^{8}$ м^4; мм$^4 = 1 \cdot 10^{-12}$ м^4
Сила, усилие	Н (ньютон); кН $= 1 \cdot 10^3$ Н
Момент	Н $\cdot$ м; кН $\cdot$ м; Н $\cdot$ мм
Интенсивность распределенной нагрузки	Н/м; Н/мм
Интенсивность распределенного момента	Н $\cdot$ м/м; Н $\cdot$ м/мм; Н $\cdot$ мм/мм
Напряжение, модуль упругости	Па (паскаль); МПа $= 10^6$ Па; Па $=$ Н/м^2; МПа $=$ Н/мм^2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стёпин П. А. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1973.
2. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1986.
3. Ицкович Г. М., Винокуров А. И., Минин Л. С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов 5
1.1. Построение эпюр продольных усилий при растяжении (сжатии) 7
1.2. Построение эпюр крутящих моментов 18
1.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов 25
1.4. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рам 50

Глава 2. Определение напряжений и деформаций. Расчеты на прочность и жесткость 60
2.1. Определение напряжений и деформаций при растяжении (сжатии) 61
2.2. Определение напряжений и деформаций при кручении бруса круглого сечения 76
2.3. Определение напряжений. Расчеты на прочность при изгибе 86
2.4. Определение деформаций при изгибе. Расчеты на жесткость 93

Глава 3. Энергетический метод определения перемещений с использованием интегралов Мора 114

Глава 4. Статически неопределимые задачи 126
4.1. Статически неопределимые задачи на растяжение (сжатие) 126
4.2. Статически неопределимые задачи на кручение 132
4.3. Статически неопределимые задачи на изгиб 134
4.3.1. Раскрытие статической неопределимости балок с помощью универсального уравнения изогнутой оси 134
4.3.2. Метод сил для раскрытия статической неопределимости балок и рам 140

Глава 5. Сложное сопротивление 156
5.1. Косой изгиб 157
5.2. Изгиб с растяжением (сжатием). Внецентренное растяжение (сжатие) 168
5.3. Изгиб с кручением 176

Глава 6. Продольный изгиб 186

Глава 7. Инерционная, ударная нагрузки. Колебания 196

Приложения 205

Список литературы 214

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Буланов Эдуард Александрович

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Ведущий редактор *Б. И. Копылов*
Художники *Н. В. Зотова, С. Инфантэ, Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *С. А. Янковой* в пакете LaTeX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов семейства LH

Подписано к использованию 19.03.15. Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Эдуард Александрович Буланов – доктор технических наук, профессор. Стаж научной и педагогической деятельности – свыше 40 лет. Автор более 100 научных статей, учебных пособий и монографий.

Область научных интересов: расчет механических передач, расчет и проектирование подъемно-транспортных машин, трение качения, моментные напряжения в механике сплошных сред.